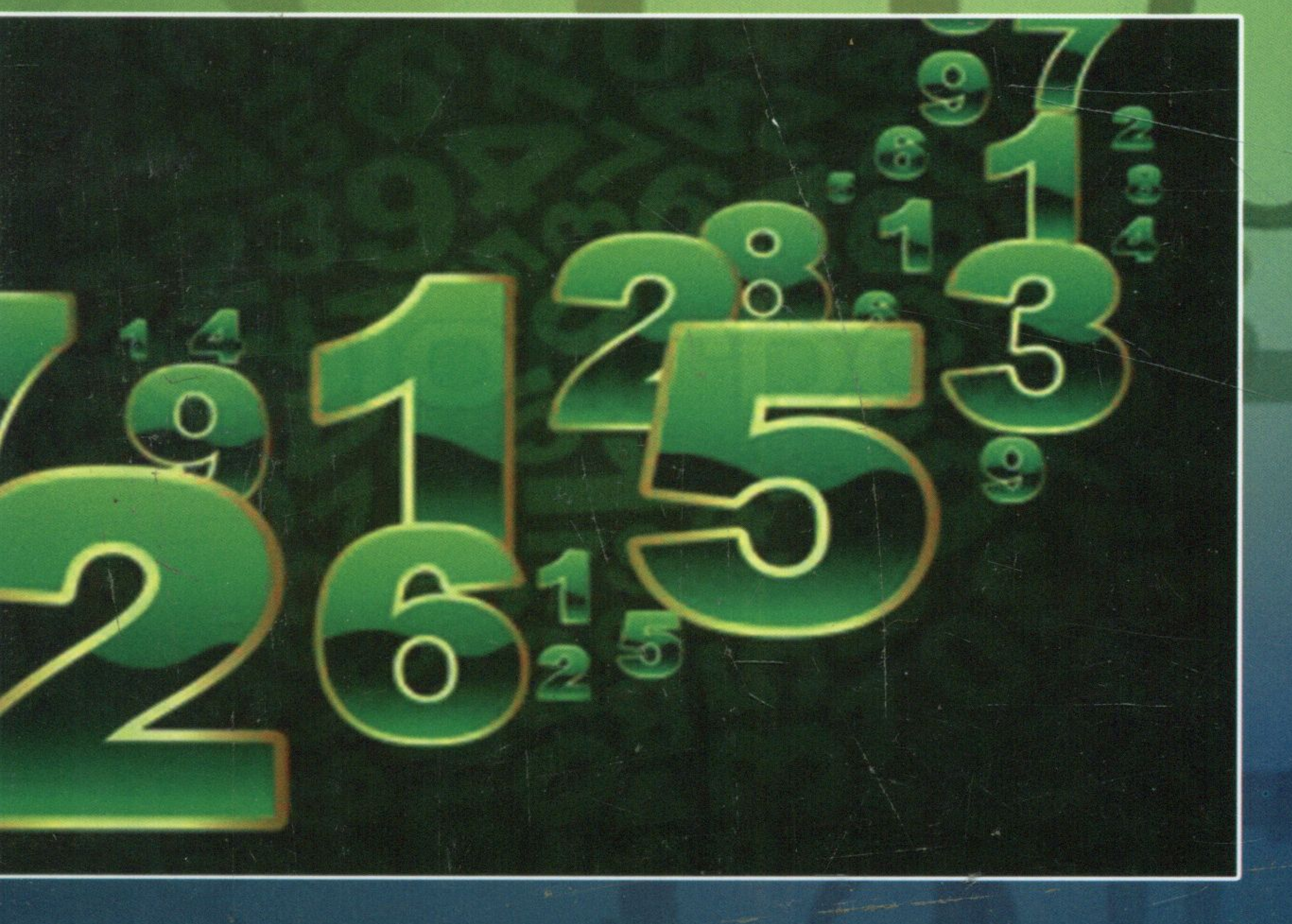
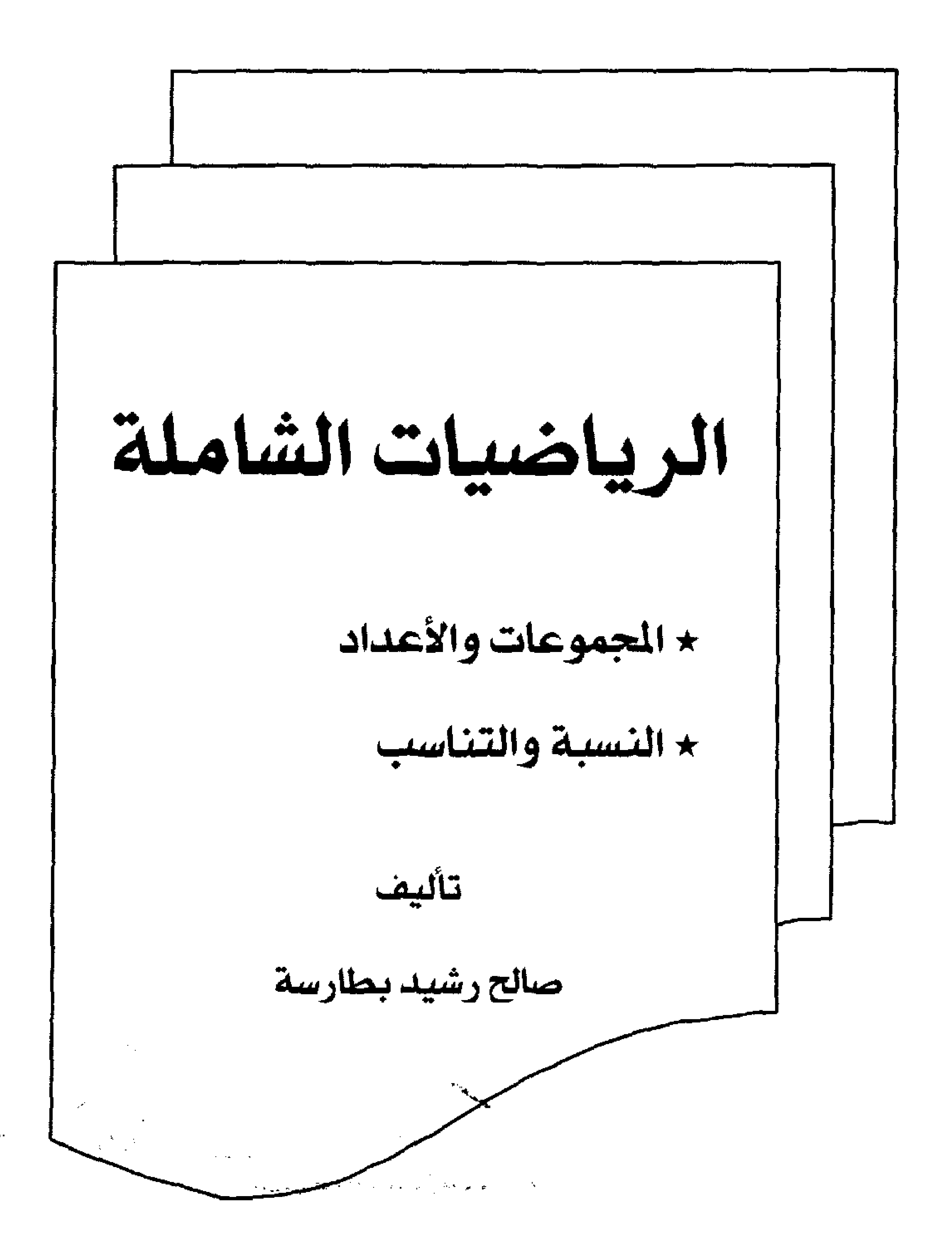
الرياضيات الشاملة

المجموعات والأعداد
النسبة والتناسب

صالح رشيد بطارسة







الرياضيات الشاملة

* المجموعات والأعداد
* النسبة والتناسب

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- **هاتف :** 5658252 – 5658253
- **فاكس :** 5658254
- **العنوان : العبدلي- مقابل البنك العربي**

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2013.

( ) **ص.**

ر.أ: (2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

المحتويات | الصفحة

المقدمة

بعد الاتكال على الله، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدَّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر.

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

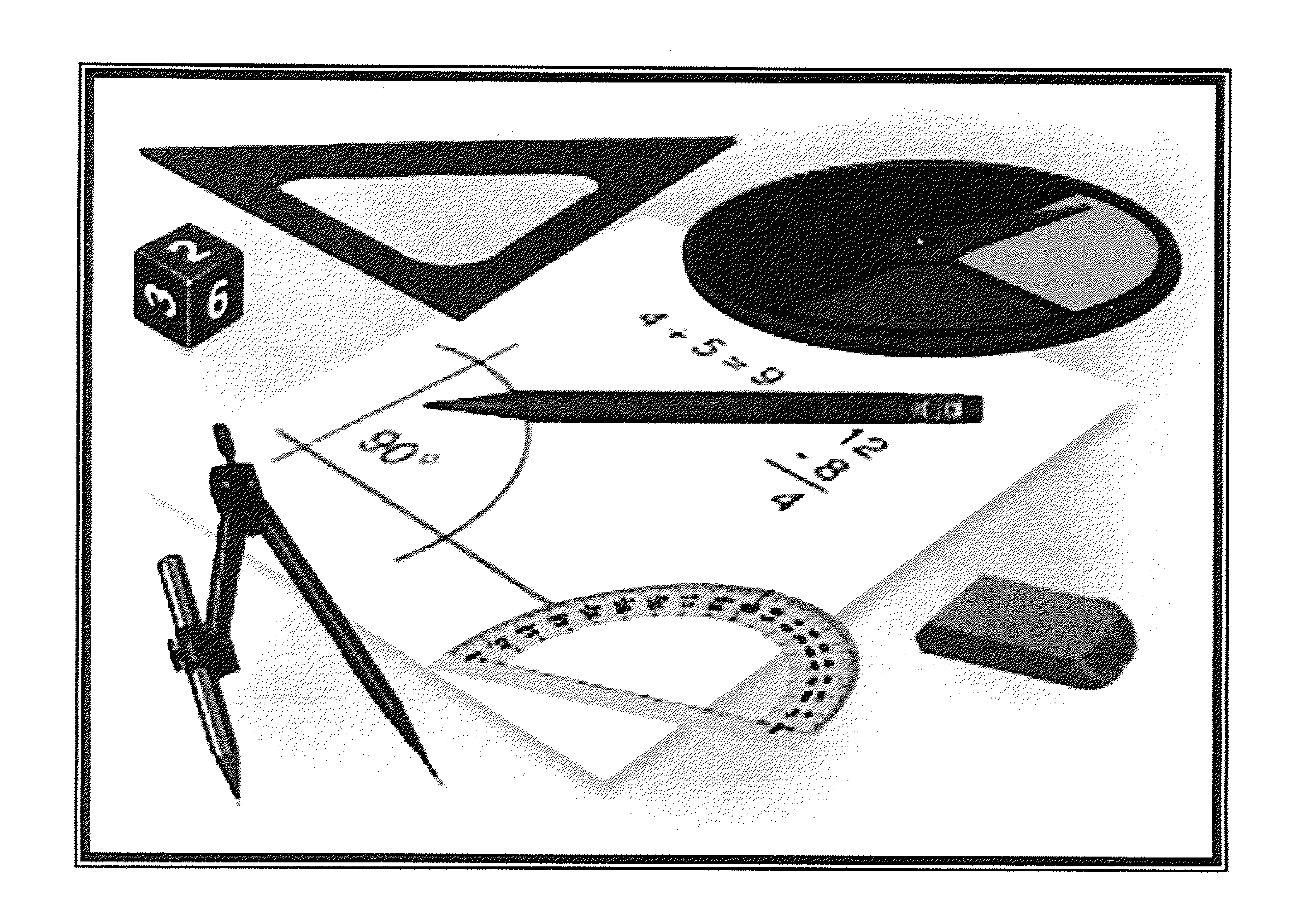
- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

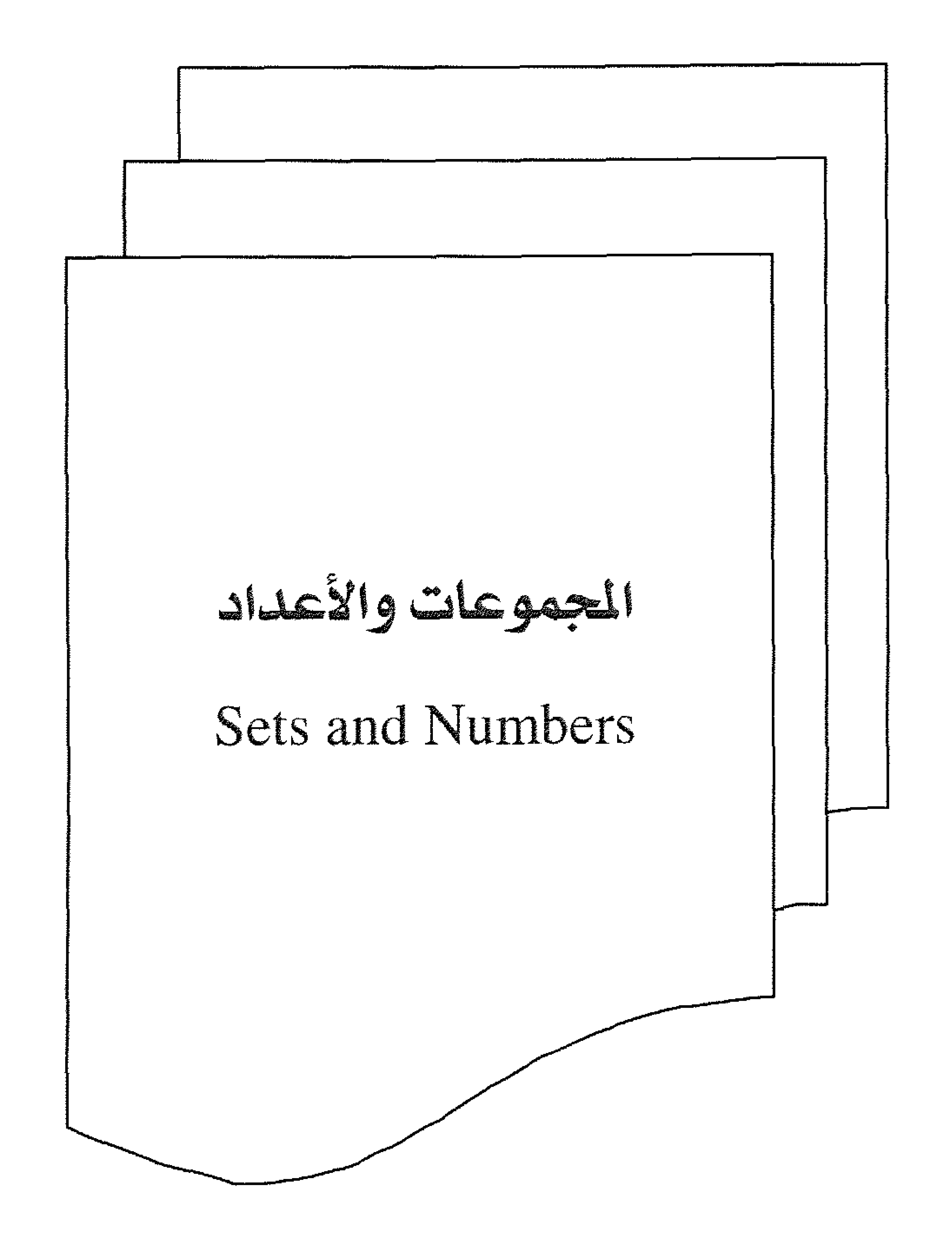
تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

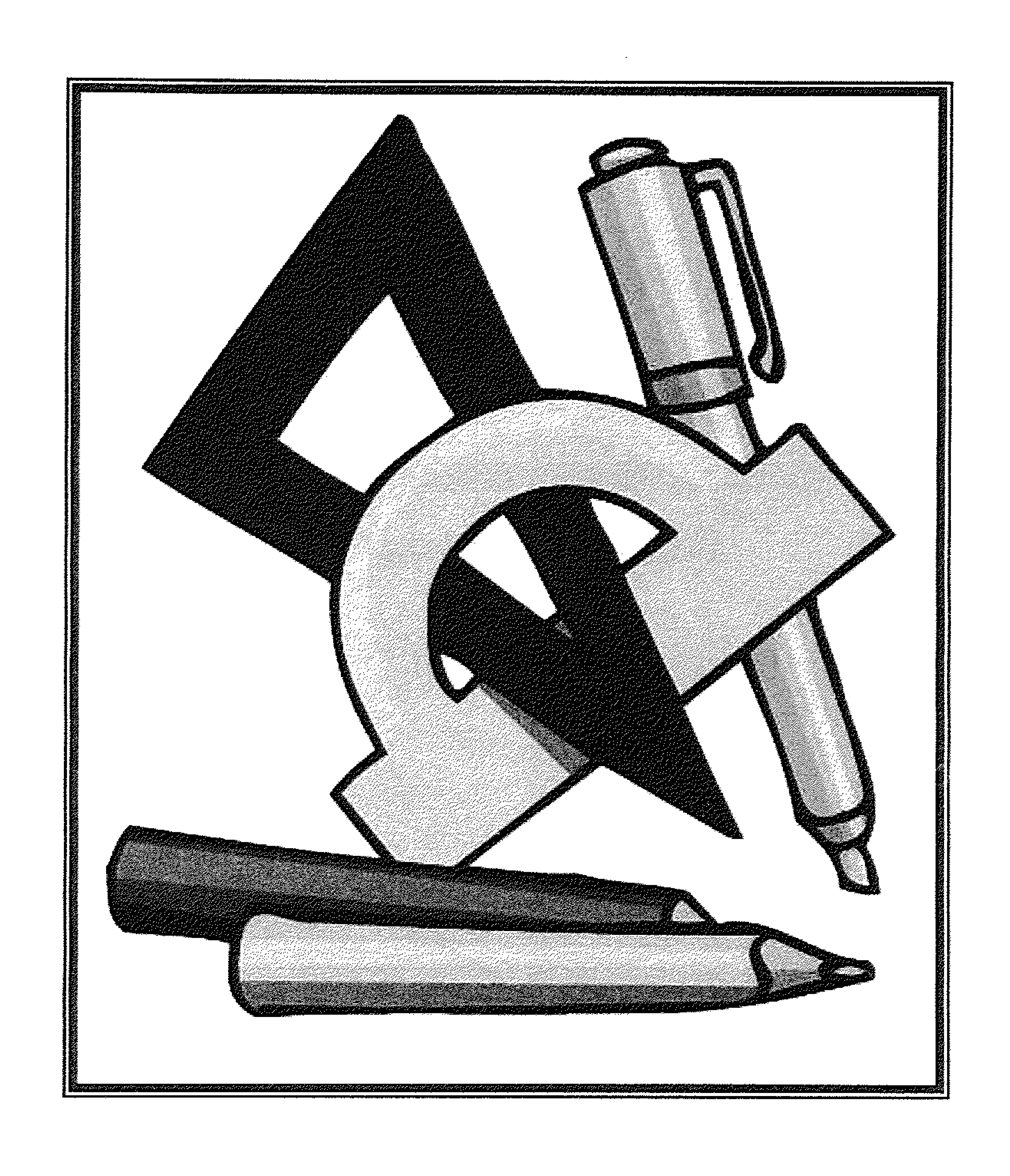
المؤلف


90°



المجموعات والأعداد

Sets and Numbers



(١- ١) المجموعة Set:

قال مدرسٌ لطلابه في أحد الفصول الدراسية ما مفاده:

أيها الطلبة:

عندما نتحدث عن نخبة من العلماء والذين كانوا على قيد الحياة ثم اختارهم الله، فإننا نتحدث عن مجموعة منهم.

وعندما نُهدي صديقَ العمر باقة من الورد، فإننا نهديه مجموعة منها.

ثم عندما نُشاهد سرباً من الحمام يحلّق في عنان السماء، فإننا نشاهد مجموعة منه.

فكلمة نخبة وكلمة باقة وكلمة سرب وغيرها من الكلمات المطابقة لها بالمعنى والمضمون، تسمى مجموعة...

فالمجموعة: تجمع من مفردات مميزة ومحددة بكل دقة واتقان، دون ترتيبٍ أو تكرار.

وهذه المفردات يمكن أن تمثل أشخاصاً أو حيوانات أو أوراقاً أو حروفاً أو أعداداً، وتسمى عناصر المجموعة، وكلٌ منها يسمى عنصراً Element في المجموعة.

يُعتبر العالم الألماني كانتور Cantor (١٨٤٥- ١٩٠٨)م أول من أوجد المجموعات واعتبرها من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، إذ أسبغ عليها فيضاً من الميزات، نوجزها بما هو آت:

- كون المجموعة كائناً رياضياً مستقلاً، فإن مفهومها يختلف عن مفهوم العناصر المكونة لها، فعند الحديث عن فرقة من الجنود حتى ولو كانت لا تضم هذه الفرقة إلا جندياً واحداً فقط، فإن حديثنا عنها يختلف عن حديثنا عن الجندي كفرد واحد، كوننا نتحدث عن مجموعة وليس عن فردٍ أبداً.

- ولأن عناصر كل مجموعة متميزة عن غيرها من المجموعات الأخرى فإنه لا داعي لتكرار أي عنصر فيها، مجموعة أرقام العدد ٤٦٤٥٥ هي الأرقام ٥ ، ٤ ، ٦ فقط، فالتكرار في المجموعة غير مسموح به على الإطلاق.

- ثم إن ترتيب عناصر المجموعة لا يؤثر على طبيعتها لا من قريب ولا من بعيد، ولا يُنقص من أهميتها ولا يزيد. فمجموعة الحروف المكونة لكلمة "مجموعة" هي الحروف التالية: جـ ، م، و، ة ، ع بلا ترتيب، علماً بأن ترتيب العناصر في المجموعة أفضل بكثير من عدم ترتيبها لتظهر مجموعة الحروف على الشكل التالي: م ، جـ ، و ، ع ، ة.

- وأخيراً كون المجموعة محددة ومعينة تعييناً تاماً، فالرجال الشجعان في أي بلدٍ كان لا يمكن أن يكونوا مجموعة كون وصف فرد بالشجاعة يختلف من شخص لآخر. في حين أن الدول العربية الأعضاء في جامعة الدول العربية تكون مجموعة كون هذه الدول معروفة لدى الجميع، ويمكن الرجوع الى سجلات الجامعة للتأكد من أن أي دولة عربية عضو في الجامعة أم لا..

والأمثلة على المجموعات وعناصرها كثيرة بعدد رمل الصحراء أو تزيد، ولكن على سبيل المثال لا الحصر يمكن تدوين بعض المجموعات وعناصرها هكذا:

مجموعة ألوان العلم الأردني وعناصرها: اللون الأسود، اللون الأبيض، اللون الأخضر، واللون الأحمر.

مجموعة أرقام العدد ٥٦٤٥ وعناصرها: الرقم ٥، الرقم ٤ ، والرقم ٦.

مجموعة أحرف كلمة سلمى وعناصرها: الحرف س، الحرف ل، الحرف م، والحرف ى.

مجموعة أيام الأسبوع وعناصرها: يوم الأحد، يوم الاثنين، يوم الثلاثاء ، ...، يوم السبت.

مجموعة الدول العربية وعناصرها: الأردن، سوريا، مصر، ... ، الصومال.

مجموعة نقط المستقيم ⟵ا ب⟶ وعناصرها جميع النقط المتراصة بجانب بعضها البعض والتي عددها غير منتهي.

هذا ويستعمل أحد الحروف الهجائية ليرمز الى المجموعة، فإذا ما رمزنا الى مجموعة أيام الأسبوع بالحرف س، ولكون يوم الأحد من أيام الأسبوع، فإن يوم الأحد عنصر من عناصر المجموعة س، لذا يمكن أن نُعبِّر عن ذلك بالرموز كما يلي:

يوم الأحد $\in$ س (الرمز $\in$ يُقرأ ينتمي الى المجموعة).

بينما شهر شباط ليس من أيام الأسبوع، فهو ليس من عناصر المجموعة س لذا يُعبر عنه بالرموز هكذا: شهر شباط $\notin$ س (الرمز $\notin$ يُقرأ لا ينتمي الى المجموعة).

وبناءً عليه فإن قيم الصواب لما يلي هي كالتالي:

الأردن $\in$ مجموعة الدول العربية ⟵ صواب.

الحرف س $\in$ مجموعة أحرف ليلى ⟵ خطأ، كون الحرف س ليس من حروف كلمة ليلى.

ليبيا $\notin$ مجموعة الدول الأوروبية ⟵ صواب، كونها ليست دولة أوروبية.

الحصان $\in$ مجموعة الحيوانات الأليفة ⟵ صواب.

العدد ٥٦ $\notin$ مجموعة الأعداد الزوجية ⟵ خطأ، كون العدد ٥٦ زوجياً.

وهكذا...

فالمجموعة في حقيقة الأمر مفهومٌ مجرد وكائن رياضي مستقل.

مثال:

اكتب عناصر المجموعات التالية:

- مجموعة الاتجاهات الأربعة الأصلية.

الجواب: شمال، جنوب، شرق، غرب.

- مجموعة أرقام العدد ٣٥٤٢٣١٥٦

الجواب: ٦ ، ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤

- مجموعة حروف كلمة "رياضيات".

الجواب: ر ، ي ، أ ، ض ، ت.

- مجموعة عواصم الدول العربية:

الجواب: عمان، دمشق، الخرطوم، ··· ، الكويت.

- مجموعة فصول السنة:

الجواب: الشتاء، الربيع، الصيف، الخريف.

- مجموعة الجامعات الأردنية:

الجواب: الأردنية، اليرموك، التكنولوجيا، ··· ، جرش.

- مجموعة الطلاب الأذكياء في مدرستك.

الجواب: لا يمكن كتابة العناصر إلا بعد تطبيق اختبار الذكاء عليهم.

- مجموعة أعضاء الجهاز التنفسي عند الإنسان.

الجواب: الأنف، القصبة الهوائية، الرئتين، الشعيبات الهوائية، الحنجرة.

- مجموعة العناصر الكيميائية المكونة للماء.

الجواب: الاكسجين، الهيدروجين.

(١- ٢) طرق كتابة المجموعة:

يمكن تعيين المجموعة أو وصفها بطريقتين لا ثالث لهما هما:

طريقة القائمة List method:

وذلك بذكر جميع عناصرها، لذا تسمى طريقة الحصر، لتعيين المجموعة إذا عُرفت جميع عناصرها، أي اذا كان عدد العناصر محدوداً بذكر جميع هذه العناصر بين حاصرتين أو قوسين على الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين منها، فإذا رمزنا لمجموعة الفصول الأربعة مثلاً بالرمز س فإننا نكتب:

س = {فصل الشتاء، فصل الخريف، فصل الصيف، فصل الربيع}.

وإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة "انسان" مثلاً بالرمز ص فإننا نكتب:

ص = { أ ، ن ، س } وهكذا.

طريقة القاعدة Law method:

وذلك بذكر صفة مميزة للعناصر المكونة للمجموعة، لذا تُسمى طريقة الوصف Description method تتعين المجموعة بذكر صفة مشتركة لعناصرها والتي تميزها عن غيرها من المجموعات بشكل واضح ودقيق، وعادة ما تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصرها كثيرة...

فإذا رمزنا لمجموعة الدول العربية بالرمز س فإننا نكتب:

س = { ص : ص دولة عربية } ونقرأ ص حيث ص دولة عربية.

وإذا رمزنا لمجموعة أرقام العدد ٩٧٨٥٦٣٦٧ بالرمز ص فإننا نكتب:

ص = { ع : ع رقم من أرقام العدد ٩٧٨٥٦٣٦٧} وهكذا...

هذا ويمكن كتابة المجموعة بالطريقتين ولكن كلاً على انفراد.

مثال:

مجموعة ألوان العلم الأردني:

أ = {اللون الأسود، اللون الأبيض، اللون الأحمر، اللون الأخضر}.

أو:

أ = { س : س لون من ألوان العلم الأردني}.

وكذلك مجموعة أشهر السنة الميلادية هكذا:

م = { شهر كانون الثاني، شهر شباط، شهر آذار، ··· ، شهر كانون أول}.

أو:

م = { ع : ع شهر من أشهر السنة الميلادية}.

علماً بأن النقط الثلاث (···) الواردة أعلاه تعني علامة الحذف في اللغة العربية، أي أن هناك عناصر أخرى لم تذكر مع أنها تنتمي الى المجموعة لعدم الاستيعاب.

ثم كذلك مجموعة الدول العربية في قارة أفريقيا:

ك = { مصر، السودان ، الصومال، ··· ، ليبيا}.

أو:

ك = { ل : ل دولة عربية افريقية}.

مثال:

اكتب المجموعات التالية بالطريقة التي تراها مناسبة لكلٍ منها:

مجموعة أسماء قارات العالم.

الجواب:

أ = {آسيا، أفريقيا، أوروبا، امريكيتين، أوقيانوسية، القارة المفقودة}.

مجموعة أشهر السنة الهجرية:

الجواب:

هـ = {محرم، صفر، ربيع أول، ... ، جمادى الثاني}.

مجموعة أرقام العدد ٢٥٣٣٢٤ :

الجواب:

ع = {٤ ، ٢ ، ٥ ، ٣}.

مجموعة أسماء أصابع اليد الواحدة:

ي = {الإبهام ، الوسطى ، السبابة، البنصر، الخنصر}.

مجموعة عواصم الدول العربية الآسيوية:

ص = { عمان، دمشق، الكويت، ... ، الدوحة}.

مجموعة العناصر المكونة للهواء:

و = {ع : ع عنصر في الهواء}.

مجموعة أجهزة جسم الإنسان:

س = { الهضمي، التنفسي، الدوري، ...، التناسلي}.

مجموعة محافظات المملكة الأردنية الهاشمية:

م = {عمان، اربد، الكرك، ... ، معان}.

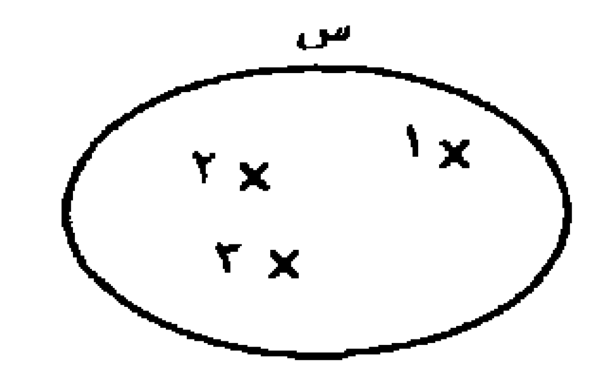
مجموعة أشجار النخيل في بساتين العراق الشقيق:

ن = {س : س شجرة نخيل في العراق الشقيق}.

(١ - ٣) اشكال فن أو (مخططات فن) Venn Diagrams:

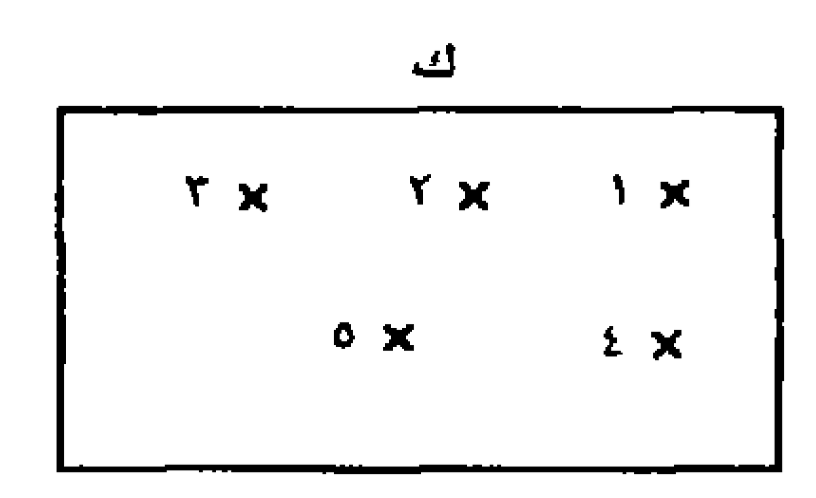
ترتبط هذه الأشكال بالمجموعات بشكل خاص، إذ أنها مخططات وصفها العالم الفرنسي فن Venn (١٨٣٤ – ١٩٢٣) م عام ١٨٨٠ لتوضيح العديد من العمليات على المجموعات، إذ استبدل الحاصرتين أو القوسين { } بمنطقة محاطة بخط مُغلق بسيط كمستطيل أو دائرة أو ما يماثلهما بالشكل، بحيث لا يتقاطع هذا الخط مع نفسه، ويسمى عندها الشكل الذي يمثل المجموعة بهذه الطريقة مخطط فن كما في الأشكال التالية:

المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ } تمثل هكذا:



حيث العناصر داخل المجموعة تمثل بنقط داخل شكل فن.

والمجموعة ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} تمثل هكذا:



وهكذا........

(١- ٤) المجموعات العددية Number Sets:

من أكثر المجموعات تداولاً في الرياضيات، يستخدمها معظم الأفراد وعلى وجه الخصوص الطالبات والطلاب، سندونها هنا بشيء من الإيجاز:

* **مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ط* ويكتب هكذا:

ط* = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}.

*** مجموعة الأعداد الكلية Whale Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب هكذا:

ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}.

وتسمى أحياناً مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر.

*** مجموعة الأعداد الصحيحة Integers Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ص وتكتب هكذا:

ص = {٠ ± ١ ، ± ٢ ، ± ٣ ، ...}.

أو هكذا:

ص = { ... ، - ٣ ، - ٢، - ١، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}.

*** مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ك وتكتب هكذا:

ك = { س : س = $\frac{أ}{ب}$ ، أ ∋ ص ، ب ∋ ص* أي أن ب ≠ صفر اطلاقاً}.

*** مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ح.

وعناصر هذه المجموعة هي جميع الأعداد السابقة والجذور.

هذا ويمكن تمثيل الأعداد الحقيقية على خط مستقيم يسمى خط الأعداد الحقيقية، يبدأ من سالب ما لانهاية (- ∞) وينتهي في اللا نهاية (∞) كما في الشكل:

- ∞ ، - ٢ ، - ١ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ∞

❖ **مجموعة الأعداد المركبة Complex Numbers:**

ويرمز لها بالرمز ع.

"وستُناقش فيما بعد ولكن في هذا المؤلف بالذات، وفي الفصل الأخير منه".

والملاحظ أن كل مجموعة عددية تحتوي عناصر المجموعة السابقة لها. أي أن كل مجموعة عددية محتواة في المجموعة اللاحقة لها.

وهكذا:

ط* ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ك ⊂ ح ⊂ ع، ،.

(١ - ٥) المجموعة الخالية Empty Set, Null Set:

إذا عيَّنا مجموعة ما بصفة مميزة وتبيّنا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الصفة أي لا تنتمي الى المجموعة على الإطلاق، فإننا نكون أمام مجموعة لا تحوي أي عنصر من العناصر، نطلق عليها اسم المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز Ø أو { } كونها فارغة من العناصر.

فالمجموعة ع = {س : س دولة عربية تقع في قارة أوروبا}،

فبعد شيء من التفكير والتمحيص وحسب معلوماتنا الجغرافية فإنه لا يوجد دولة عربية في قارة أوروبا. حيث دولنا العربية منتشرة في قارتي آسيا وافريقيا فقط. لذا لا يوجد عنصر في هذه المجموعة، من هنا ندعوها المجموعة الخالية. عندها يمكن أن نكتب ع = ϕ = { }.

ومثلها بالضبط:

ص = { س : س عدد طبيعي فردي محصور بين العددين ٢ ، ٣}.

وحيث أنه لا يوجد بين العددين الطبيعيين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي سواء أكان فردي أو زوجي، فإن ص = ϕ = { }.

وكذلك مجموعة الأشخاص الذين أطوالهم أكثر من ثلاثة أمتار، مجموعة المثلثات التي لكل منها أربعة أضلاع وغيرها من المجموعات الخالية، وتمثل المجموعة الخالية ϕ = { } بالمخطط ◯ دون وجود عناصر داخلها.

(١ – ٦) المجموعات المنتهية وغير المنتهية Finite and Infinite Sets:

أصبح من المعلوم أن عدد عناصر المجموعة س = {أ ، ب ، جـ، د} هو أربعة عناصر بالتحديد. في حين أن عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية ط* حيث ط* = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...} لا يمكن عدها بالتأكيد، هذا بالنسبة لعدد عناصر المجموعات، فإننا نسمي المجموعات الخالية والمجموعات التي يمكن تعداد عناصرها ولو نظرياً بالمجموعات المنتهية، فالمجموعة المنتهية هي المجموعة التي عدد عناصرها محدود، ونُسمي هذا العدد بالعدد الرئيس أو العدد الكاردينالي Cardinal Number ويرمز له بالرمز ن.

أي أن ن (س) = ٤

ن ({ }) = صفر

مع ملاحظة أن { } لا تحوي عناصر اطلاقاً، ولكن عدد عناصرها = صفر أي أن ن ({ }) = ن (ϕ) = صفر.

وفي غير هذه الحالات فإننا نكون أمام مجموعة لا يمكن عد عناصرها أي أن عدد عناصرها لا ينتهي فتسمى مجموعة غير منتهية. ومن أمثلتها:

مجموعة نقط قطعة مستقيمة.

ومجموعة الأعداد الصحيحة ص.

والمجموعات العددية جميعها بلا استثناء.

مثال:

صنّف المجموعات التالية الى منتهية وغير منتهية:

مجموعة سكان الكرة الأرضية ⟵ منتهية.

مجموعة الأعداد الطبيعية السالبة، صَ ⟵ غير منتهية.

مجموعة أسماء الخلفاء الراشدين ⟵ منتهية.

مجموعة بحار العالم ⟵ منتهية.

مجموعة الأشخاص الذين لا يموتون ⟵ منتهية/حيث أنها المجموعة الخالية.

مجموعة أنهار العراق ⟵ منتهية.

مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ⟵ غير منتهية.

مجموعة أحرف كلمة "الوطن" ⟵ منتهية.

مجموعة أرقام العدد ٧٨٩٨٧٩ ⟵ منتهية.

مجموعة العناصر الكيماوية المكونة لملح الطعام ⟵ منتهية/ كونها:

⟵ صوديوم Na.

⟵ وكلور Cl_2.

مجموعة حبيبات رمل البحر ⟵ غير منتهية.

(١- ٧) الاحتواء والمساواة Inclusion and Equality:

إذا كانت المجموعة س مجموعة أطفال السيد حمدان، حيث:

س = {سلمى، سلوى، سامي، سعاد، سمير}.

وإذا رمزنا لمجموعة البنين منهم بالرمز ص حيث ص = {سامي، سمير} فإن كل عضو في المجموعة ص ينتمي الى المجموعة س وليس العكس.

عندها يقال أن المجموعة ص مجموعة جزئية Subset من المجموعة س أو المجموعة ص محتواة في المجموعة س وتكتب الرموز هكذا:

ص $\subset$ س وتقرأ ص محتواه في س.

وهكذا تكون ص $\subset$ س إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة ص ينتمي الى المجموعة س، وإلا فالمجموعة ص غير محتواه في المجموعة، ويتحقق ذلك كما في المثال:

إذا كانت ص = {١ ، ٢ ، ٣}، س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦}.

فإن ص $\not\subset$ س { الرمز $\not\subset$ يقرأ غير محتواه في }.

ونقطة الخلاف الصفر ١ ، حيث ١ $\in$ ص و ١ $\notin$ س.

وإذا كانت المجموعة س مجموعة أحرف كلمة عمان، أي أن:

س = { ع ، م ، أ ، ن}.

وكانت المجموعة ص مجموعة أحرف كلمة معان، أي أن:

ص = { م ، ع ، أ ، ن}.

فإن س $\subset$ ص كون كل عنصر من عناصر المجموعة س ينتمي الى المجموعة ص.

وكذلك فإن ص $\subset$ س كون كل عنصر من عناصر المجموعة ص ينتمي الى المجموعة س. أي أن:

(س $\subset$ ص) و (ص $\subset$ س) عندها يقال أن:

س = ص هذا شرط المساواة بين مجموعتين.

أي أن المجموعتين م ، ن تكونان متساويتين إذا تكونتا من العناصر نفسها دون النظر الى الترتيب.

فإذا كانت المجموعة م هي مجموعة أرقام العدد ١٢٢٣ أي أن م ={٣ ، ١، ٢}

والمجموعة د ، هـ حيث د = {٣ ، ٥}، هـ = {٥ ، ٣}.

فينطبق عليها شرط الاحتواء، أي أن د ⊂ هـ

وكذلك شرط المساواة، أي أن د = هـ

عندها يمكن أن نكتب بالرموز هكذا: د ⊆ هـ

ومعناه أن (د ⊂ هـ) أو (د = هـ) أيهما صواب أو كليهما معاً.

لذلك فإن {١ ،٢}⊆{ ١، ٢، ٣} لأن {١ ،٢}⊂ { ١، ٢، ٣}

وكذلك فإن {١ ،٢}⊆ {٢، ١} لأن {١، ٢} = {٢ ، ١}

وبشكل عام إذا كانت م ⊂ ن فيكتب م ⊆ ن

وبما أن {١ }⊂ {٢،١}، وكذلك {٢}⊂{١ ،٢} ثم إن {١، ٢} ⊂{١، ٢} محتواه في نفسها. وعلماً بأن ϕ ⊂ {١ ،٢} كون المجموعة الخالية ϕ لا تحتوي عناصر اطلاقاً.

فإن المجموعات ϕ ، {١} ، {٢} ، { ١، ٢} جميعها مجموعات جزئية للمجموعة {١ ،٢}.

وهنا يجب ملاحظة أن:

عدد المجموعات الجزئية للمجموعة الخالية { } واحد، وهي نفسها ϕ.

وعدد المجموعات الجزئية للمجموعة {١} اثنان وهما ϕ ، {١}.

وعدد المجموعات الجزئية للمجموعة {١، ٢} أربعة وهي ،ϕ {١}، {٢} ، {٢}، {١ ،٢}.

وبناء على هذا المنوال يمكن استنتاج أن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة التي عدد عناصرها ن هو $٢^{ن}$ مجموعة جزئية.

فإذا كانت المجموعة س = {١ ، ٢، ٣} فإن عدد عناصرها الجزئية هو $٢^{٣}$ = ٨

وهي ϕ ، {١ }، {٢ }، {٣}، {١ ، ٢} ، {٢، ٣}، {١ ،٣} ، {١ ، ٢، ٣}}.

تسمى جميع هذه المجموعات الجزئية ماعدا الخالية منها بالمجموعات الجزئية الفعلية Proper Subsets وأما المجموعة ϕ فإنها مجموعة جزئية لكنها غير فعلية.

ملحوظة:

يجب التمييز بين استعمال الرمزين $\in$، $\subset$ كما يلي:

حيث الأول $\in$ يربط عنصر بمجموعة هكذا:

١ $\in$ {١ ، ٢، ٣}.

والثاني $\subset$ يربط مجموعة بأخرى هكذا:

{ ١ } $\subseteq$ { ١، ٢، ٣}.

فإذا كانت المجموعة س = {٣ ، ٥، ٤ ، أ ، ب}، ص = {٣ ، ٤، ب ، جـ}

فإن ٣ $\in$ س، {٥، ٦}$\not\subset$ س، ب $\in$ ص، ب $\in$ س

ص$\not\subset$ س، { أ ، ب}$\subset$ س، ٥ $\notin$ ص وهكذا.

مثال:

- إذا كانت {١، ٢، ٣، أ} = {٤ ، ٣، ٢ ، ١} ما قيمة أ؟

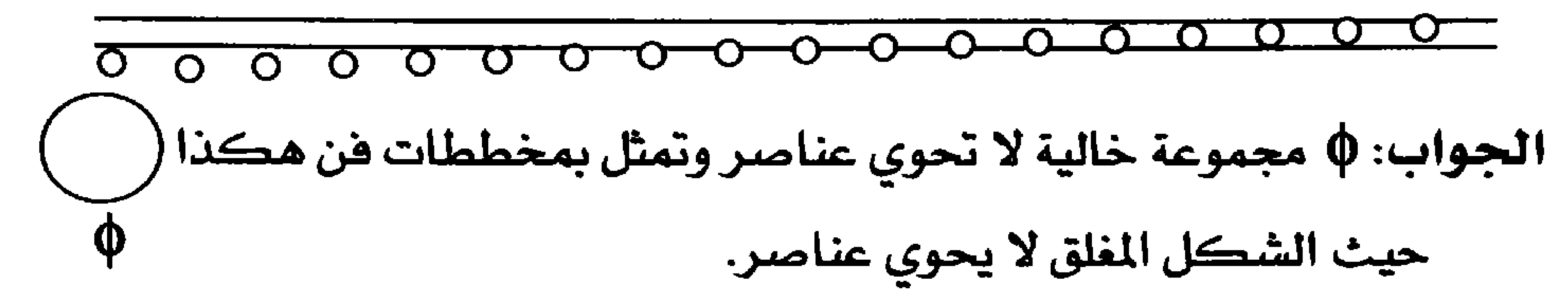
الجواب: أ = ٤ كون المجموعتين متساويتين.

- ما عدد عناصر مجموعة القوة للمجموعة س = {أ ، ب ، جـ ، د}؟

عدد عناصر مجموعة القوة = $2^{ن}$ حيث ن عدد عناصر المجموعة س

= 2^{4} = ١٦ مجموعة جزئية.

- ما الفرق بين ϕ ، {ϕ} وكيف نمثل كلاً منها بمخططات فن؟



الجواب: ϕ مجموعة خالية لا تحوي عناصر وتمثل بمخططات فن هكذا ◯ ϕ حيث الشكل المغلق لا يحوي عناصر.

وأما $\{\phi\}$ مجموعة أحادية أي تحوي عنصر واحد هو ϕ (كعنصر) أي أن الرمز ϕ هنا كعنصر. وتمثل بمخططات فن هكذا ($\times\phi$) $\{\phi\}$ حيث الشكل المغلق يحتوي عنصر واحد هو ϕ.

(١ - ٨) المجموعة الكلية أو الشاملة Universal Set:

اذا كانت جميع المجموعات الواردة في دراسة واحدة أجزاء من مجموعة واحدة –جزئية لمجموعة واحدة- سميت هذه المجموعة بالكلية أو الشاملة، ويرمز لها بالرمز ك وهذه المجموعة كأنها إطار يضم داخله المجموعات الجزئية منها والتي هي قيد الدراسة الواحدة.

فإذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣}، ص = {٢ ، ٣، ٤ ، ٥}، ع = {٥ ، ٦ ، ٧}

فإن المجموعة الكلية أو الشاملة لهذه المجموعات:

يمكن أن تكون ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} مثلاً.

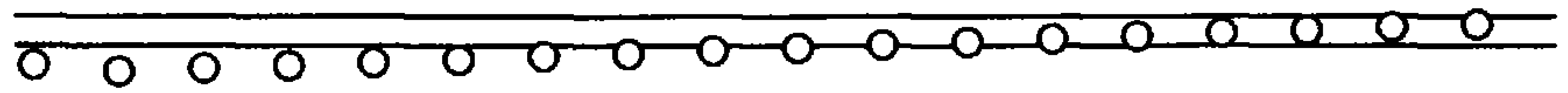
لأن س $\subseteq$ ك ، ص $\subseteq$ ك ، ع $\subseteq$ ك

كون كل عنصر من عناصر المجموعات س ، ص ، ع بلا استثناء ينتمي الى المجموعة ك الكلية.

وعليه فالمجموعة الكلية لمجموعات الفصول الدراسية كافة هي المدرسة بكاملها، كون كل طالب من طلاب الفصول الدراسية ينتمي الى المدرسة، وهكذا..

وفي هذا المجال يمكن أن يقال بأن المجموعة العددية الكلية لكافة المجموعات العددية الأخرى هي مجموعة الأعداد المركبة ع، ولكن بشكل تراكمي، كما في الشكل.

حيث ط* $\subset$ ع ، ط $\subset$ ع ، ص $\subset$ ع ، ك $\subset$ ع ، ح $\subset$ ع

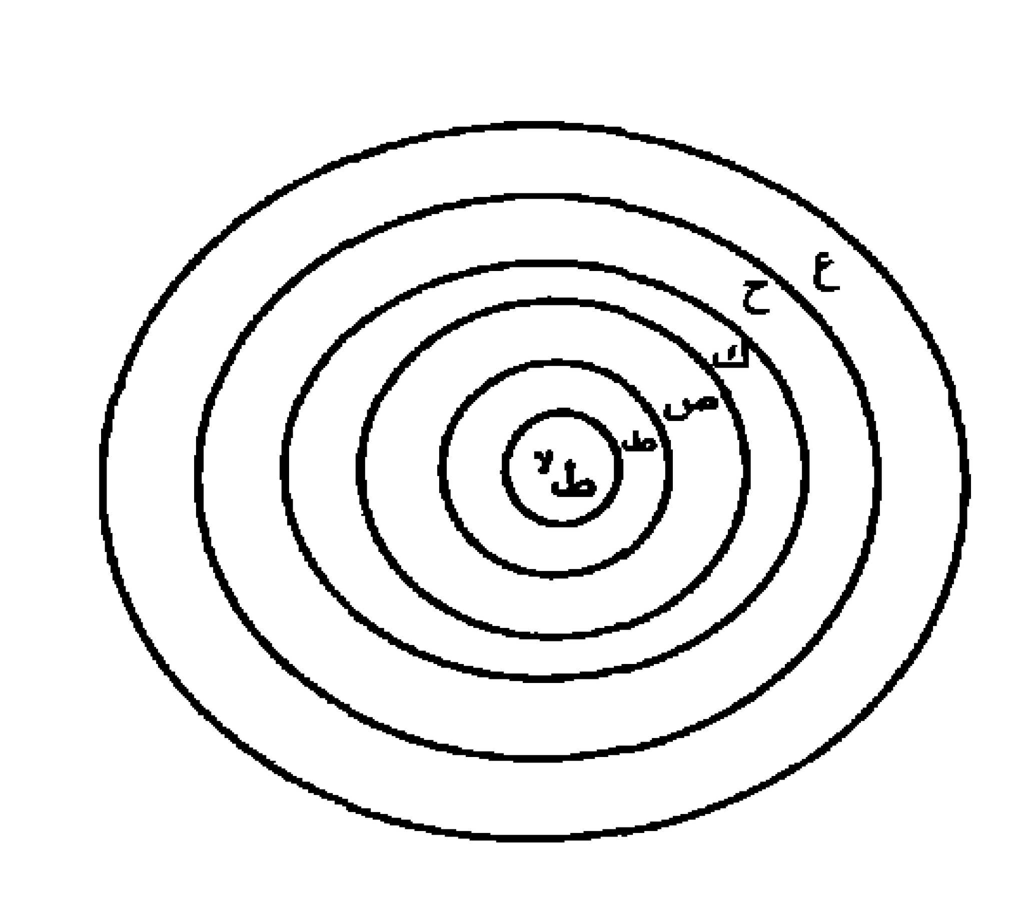


لأن ط* ⊃ ط ⊃ ص ⊃ ك ⊃ ح ⊃ ع



فكل عنصر في ط* هو في ع

وكل عنصر في ط هو في ع وهكذا..



(١ - ٩) جبر المجموعات Algebraic Sets :

والمقصود بجبر المجموعات هو تكوين مجموعات جديدة من اخرى قديمة، وذلك بعمليات عديدة نحصرها بالخمس التالية:

(i) عملية التقاطع Intersection:

التقاطع عملية رياضية ترتبط بالمجموعات مفادها تكوين مجموعة واحدة من مجموعتين أو اكثر، بحيث تكون عناصر هذه المجموعة تنتمي الى كل من المجموعات أو المجموعتين بالتحديد أي أن العنصر المشتركة بين المجموعتين فقط، والتفسير كما في الأوضاع التالية:

اذا كانت س = { ١، ٢، ٣} ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤}

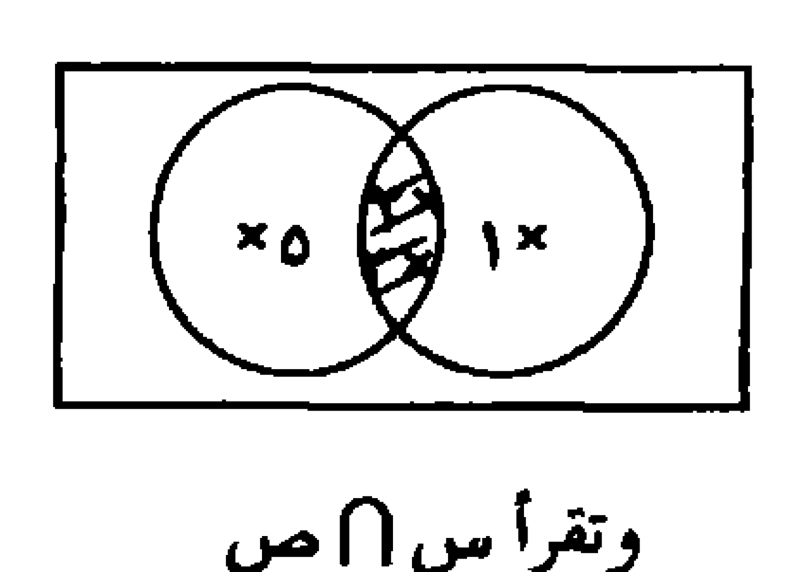
فإن س المجموعة الناتجة عن تقاطع المجموعتين س ، ص هي المجموعة التي عناصرها العناصر المشتركة بين المجموعتين بلا تكرار.

وبالرموز:

س ∩ ص = {٢ ، ٣} حيث ∩ يقرأ تقاطع.

وبأشكال فن تمثل س ∩ ص بالمنطقة المظللة وبما أنه يوجد عناصر مشتركة بين المجموعتين س، ص فانهما تسميان مجموعتان متقاطعتان.

ك= المجموعة الكلية



وتقرأ س ∩ ص

واذا كانت المجموعتان منفصلتين Disjoint فإنه لا يوجد فيها عناصر مشتركة كما يلي:

س = {١ ، ٢}، ص = {٥ ، ٦}.

فإن س ∩ ص = ϕ = { } حيث لا عناصر مشتركة.

وباشكال فن لا تظليل.

وتسمى المجموعتان منفصلتين وشرط الانفصال في المجموعات هو:

س ∩ ص = ϕ

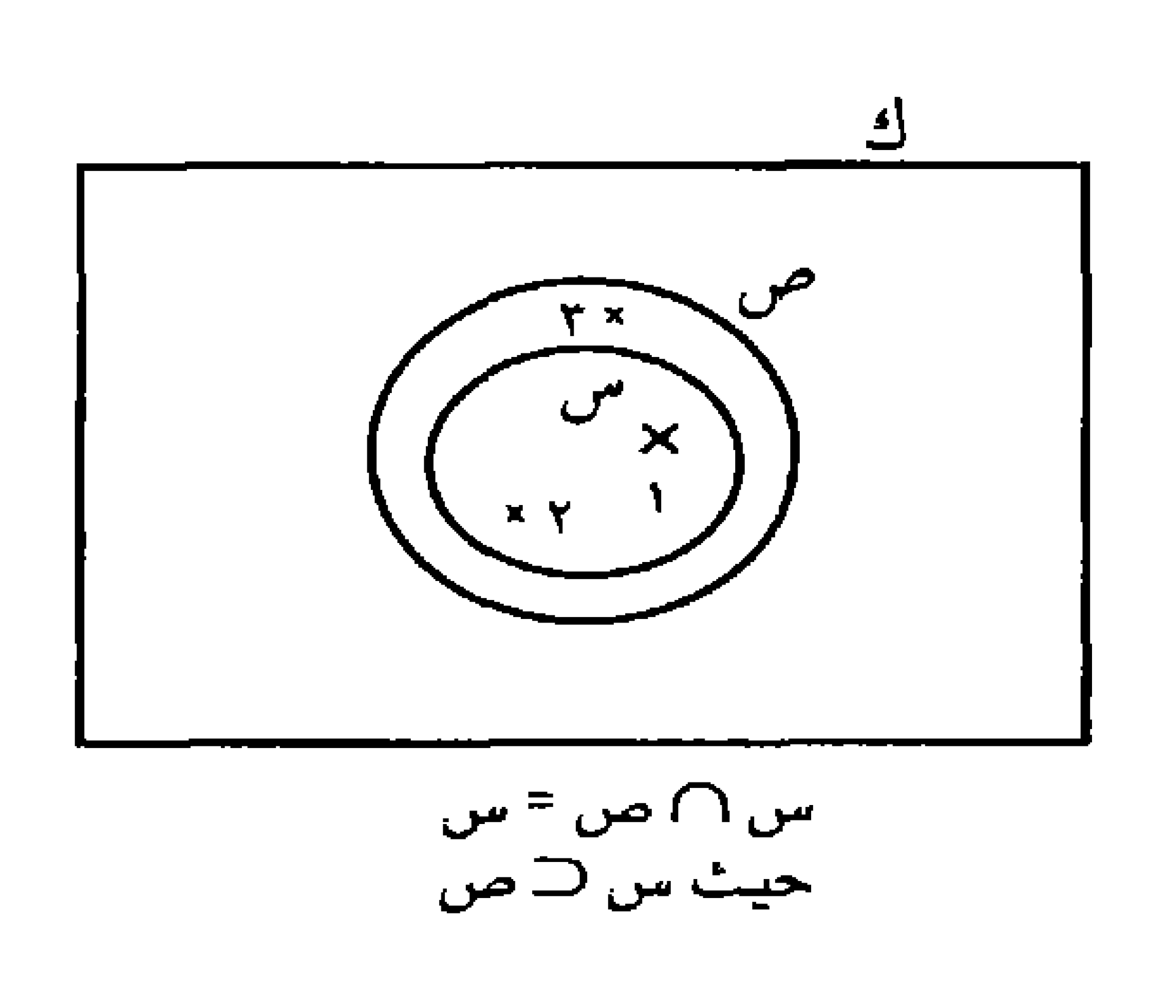
س ∩ ص = ϕ
ولا تظليل اطلاقا

واذا كانت المجموعتان متداخلتين، أي أن الأولى محتواه في الثانية أو العكس أي أن س ⊂ ص مثل:

س = {١ ، ٢}، ص + {١ ، ٢ ، ٣}

فإن س ∩ ص = {١ ، ٢}

وباشكال فن:



س ∩ ص = س
حيث س ⊂ ص

وبشكل عام يمكن وصف عملية تقاطع مجموعتين أو أكثر هكذا:

س ∩ ص = {ع : أ ∋ س و أ ∋ ص}

حيث أ عنصر مشترك في كليهما.

فعناصر مجموع التقاطع للمجموعتين س ، ص ينتمي الى المجموعتين معاً.

والآن سنورد خصائص تقاطع المجموعات على نظريات وقوانين بلا اثبات ولا براهين، مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان هكذا:

للمجموعات س = {١ ، ٢ ، ٣}

ص= {٢ ، ٣، ٤ }

ع = {٢ ، ٣ ـ ٥}

فإن:

× س ∩ ص = ص ∩ س

كون س ∩ ص = { ٢ ، ٣ }

وكون ص ∩ س = {٢ ، ٣}

فتقاطع المجموعات تبديلي Commutative.

× (س ∩ ص) ∩ ع = س ∩ (ص ∩ ع)

كون (س ∩ ص) ∩ ع = {٢ ، ٣ }

وكون س ∩ (ص ∩ ع) = {٢ ، ٣ }

فتقاطع المجموعات تجميعي Associative.

× س ∩ س = س

وكذلك ص ∩ ص = ص

وكذلك ع ∩ ع = ع

وهذا القانون يدعوه الرياضيون قانون اللانمو Idem potency.

أي أن المجموعة تقاطع نفسها بلا زيادة في عدد عناصرها.

× (س ∩ ص) ⊂ س

وكذلك (س ∩ ص) ⊂ ص وهكذا

كون { ٢ ، ٣ } ⊂ { ١ ، ٢ ، ٣}

وكون { ٢، ٣ } ⊂ { ٢ ، ٣ ، ٤}

× س ∩ ϕ = ϕ ∩ س = ϕ

حيث ϕ المجموعة الخالية.

لذلك فالمجموعات س ∧ ϕ ، ϕ ∩ س لا تحوي عناصر اطلاقاً.

× س ∩ ك = ك ∩ س = س

حيث ك المجموعة الكلية.

(ii) **عملية الاتحاد** Union:

والاتحاد عملية رياضية ترتبط بالمجموعات مفادها تكوين مجموعة واحدة من مجموعتين أو أكثر، بحيث تكون عناصر هذه المجموعة تنتمي الى احدى المجموعات على الأقل أو جميعها.

والتفسير:

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

فالمجموعة الناتجة عن اتحاد المجموعتين س ، ص هي المجموعة التي عناصره جميع عناصر المجموعتين بلا تكرار لأي عنصر منهما مهما كان.

وبالرموز:

س ∪ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ }

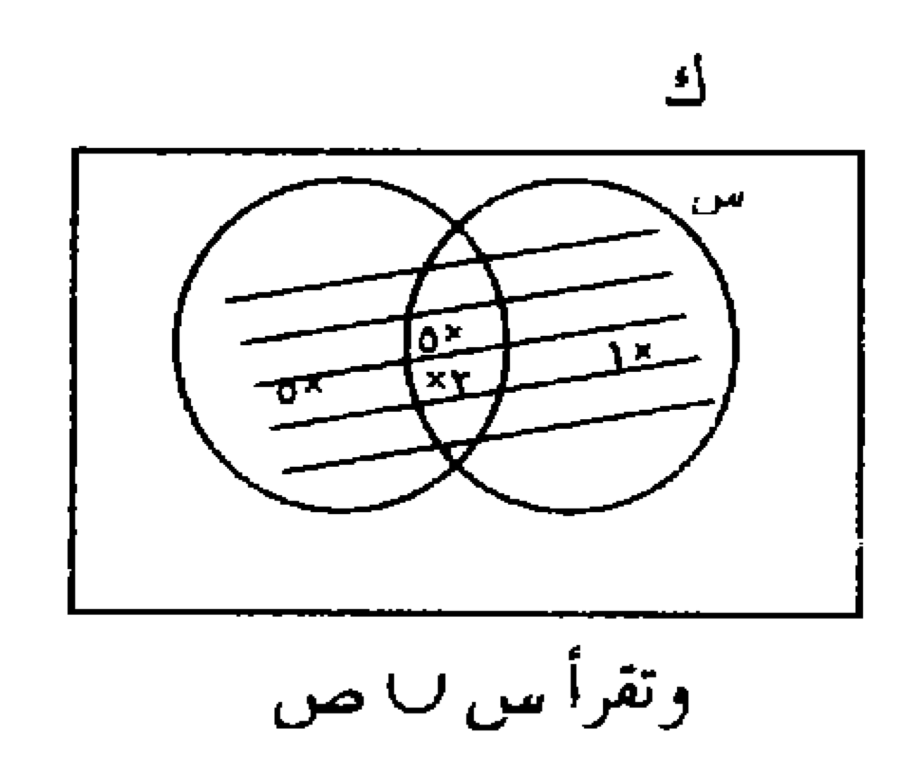
حيث:

الرمز ∪ يقرأ اتحاد.

وكأن عناصر المجموعة س ∪ ص هي العناصر المشتركة بين المجموعتين

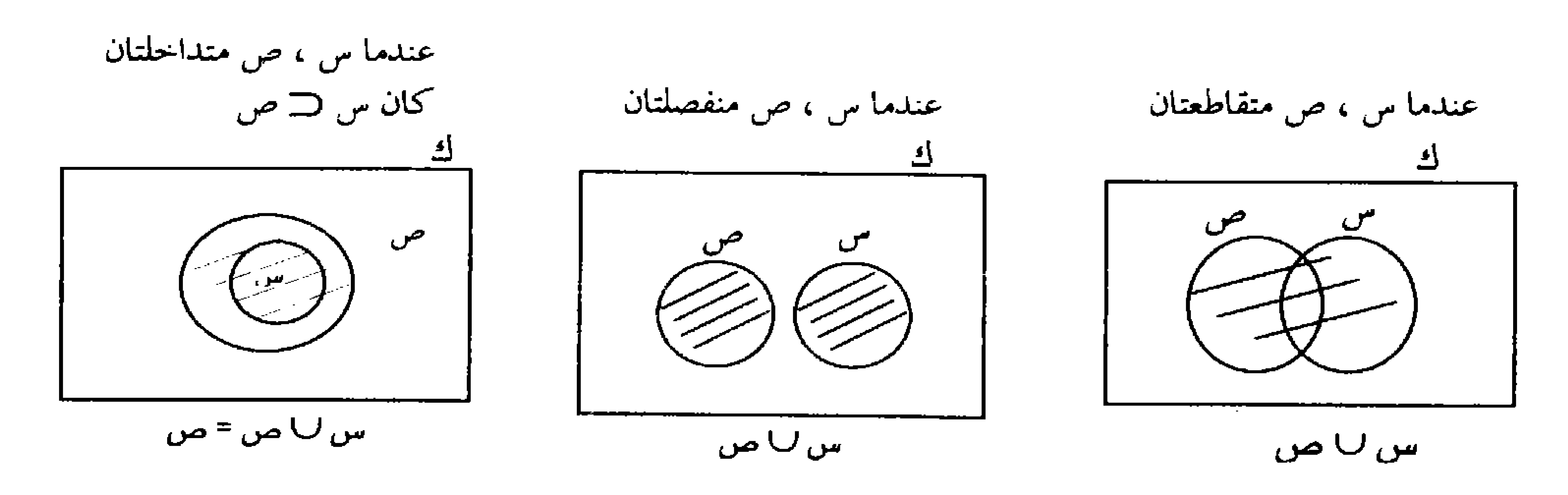
- { ٢ ، ٣ } – والعناصر غير المشتركة – { ١ ، ٥ }

وباشكال فن:



وتقرأ س ∪ ص

ومخططات فن التالية توضح عملية اتحاد مجموعتين س ، ص في حالات متباينة، حيث تمثل المناطق المظللة س ∪ ص في كل منها.



لذا يمكن وصف عملية الاتحاد بشكل عام لمجموعتين أو أكثر هكذا:

س ∪ ص = { ع : أ ∈ س أو أ ∈ ص }

حيث أ أي عنصر من عناصر المجموعة س ∪ ص وهو وصف لما يُقال بأن عناصر مجموعة الاتحاد تنتمي الى احدى المجموعتين على الأقل أو الى كليهما معاً.

والآن سنورد خصائص عملية الاتحاد على المجموعات بشكل نظريات وقوانين، وبلا اثبات وبراهين، مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

للمجموعات: س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

ع = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

فإن:

س ∪ ص = ص ∪ س

كون: س ∪ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ص ∪ س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١ }

فاتحاد المجموعات تبديلي Commutative.

× (س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع)

كون: (س ∪ ص) ∪ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

س ∪ (ص ∪ ع) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

فاتحاد المجموعات تجميعي Associative.

× س ∨ س = س وكذلك ص ∨ ص = ص ، ع ∨ ع = ع

وهذا القانون يدعوه الرياضيون قانون اللانمو Idem potency.

أي أن المجموعة اتحاد نفسها تعطي المجموعة نفسها بلا زيادة لعدد عناصرها.

س ⊂ (س ∪ ص) وكذلك ص ⊂ (س ∪ ص) وهكذا..

كون {١ ، ٢، ٣} ⊂ { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

وكذلك {٢ ، ٣ ، ٤} ⊂ { ١، ٢ ، ٣ ، ٤}

س ∪ ϕ = ϕ ∪ س = س

حيث ϕ المجموعة الخالية وكأنها محايدة هنا كونها لا تؤثر بغيرها من المجموعات من زيادة عدد عناصرها أو انفصالها على السواء.

س ∪ ك = ك ∪ س = ك حيث ك المجموعة الكلية.

الآن دونك هذا السؤال:

ما العلاقة بين عملية اتحاد وعملية تقاطع المجموعات؟

الجواب:

كما في البندين التاليين:

البند الأول: قانون التوزيع Distributive Law:

وعلى صورتين:

الأولى: توزيع عملية الاتحاد على عملية التقاطع وبالرموز:

س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ ع)

الثانية: توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد وبالرموز:

س ∩ (ص ع) = (س ∩ ص) ∩ (س ∩ ع)

ولتحقيق هذا القانون نفرض:

س = { ٥ ، ٦ ، ٧ }

ص = { ٥ ، ٧ ، ٨ }

ع = { ٥ ، ٨ ، ٩ }

توزيع الاتحاد على التقاطع:

{٥ ، ٦ ، ٧} ∪ ({٥، ٧ ، ٨} ∩ {٥ ، ٨ ، ٩}).

= {٥ ، ٦ ، ٧} ∪ {٥ ، ٨} = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} الطرف الايمن.

وكذلك:

({٥ ، ٦ ، ٧} ∪ {٥ ، ٧ ، ٨}) ∩ ({٥ ، ٦ ، ٧} ∪ {٥ ، ٨ ، ٩})

= {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} ∩ {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

= {٥، ٦ ، ٧ ، ٨} = الطرف الأيسر.

وأما توزيع التقاطع على الاتحاد مناقشته أتت بنفس الأسلوب:

البند الثاني: هو هذه العلاقة بين التقاطع والاتحاد في المجموعات:

(س ∩ ص) ⊂ (س ∪ ص)

حيث: س ∩ ص = {٥ ، ٧}

س ∪ ص = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

وكون {٥ ، ٧} ⊂ {٥ ، ٦ ، ٨ ، ٧}

فإن:

س ∩ ص ⊂ (س ∪ ص) دائماً.

أمثلة على الاتحاد والتقاطع معاً

مثال:

اذا كانت س = مجموع أرقام العدد٢٤٩٧٨٤

ص = مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ٣ ، ١٠ ودونهما.

فإن:

س ∪ ص = { ٤ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٢} ∪ { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

= { ٤ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٢ ، ٦ ، ٥ ، } العناصر المشتركة وغير المشتركة.

وان:

س ∩ ص = { ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٢} ∩ { ٤، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

= {٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩} العناصر المشتركة فقط.

مثال:

اذا كانت س مجموعة مضاعفات العدد ٣ والتي تقل عن ٢٠

وكانت ص مجموعة مضاعفات العدد ٧ والتي تقل عن ٢٠

فإن: س = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨}

وان: ص = { ٧ ، ١٤ }

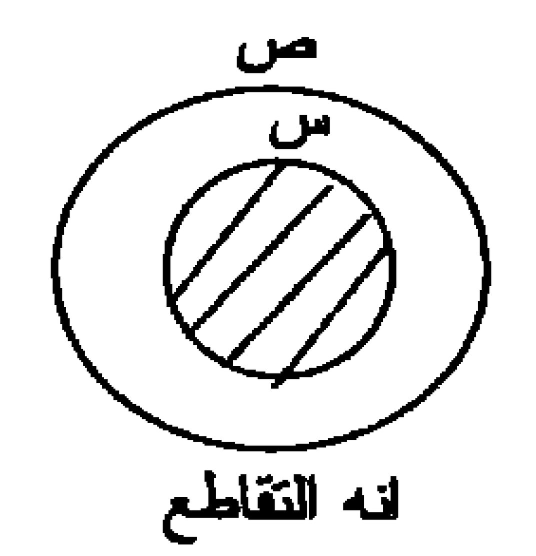
وان: س ∩ ص = ϕ حيث س ، ص مجموعتان منفصلتان

وان: س ∪ ص = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ٧ ، ١٤ }

مثال:

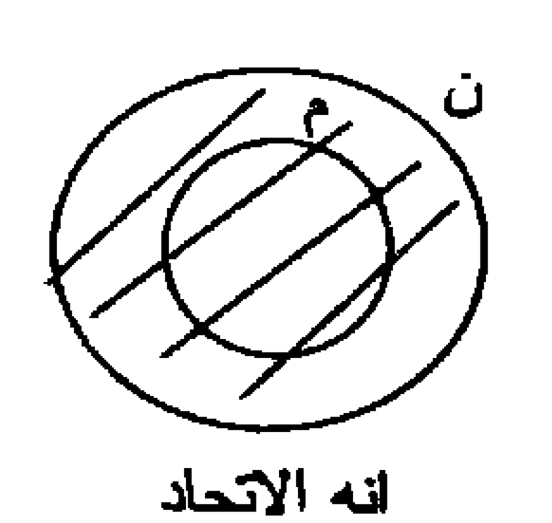
باستعمال العملية ∪ ، ∩ عبر عن المنطقة المظللة في الشكل:


الأول:



التعبير س ∩ ص = س كون س ⊂ ص

الثاني:



التعبير م ∪ ن = ن كون م ⊂ ن

(iii) عملية الفرق Difference:

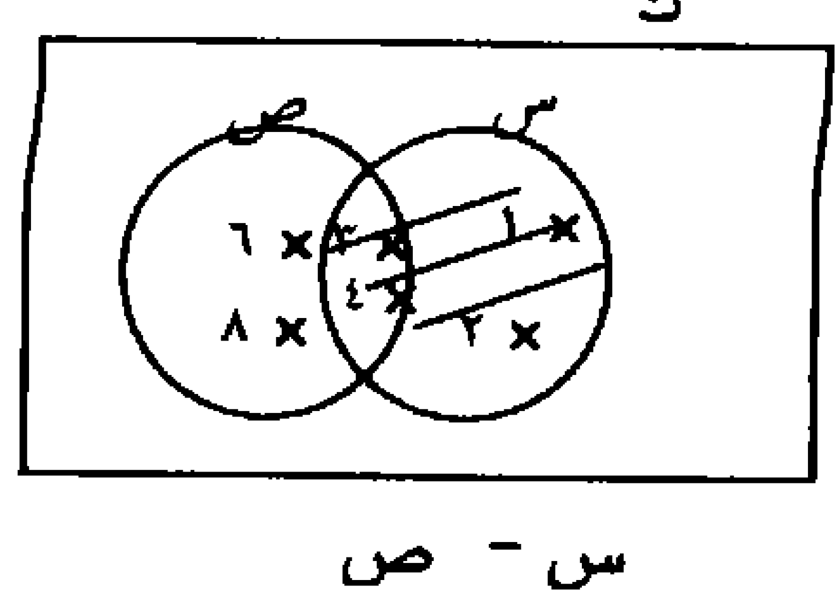
عملية الفرق بين مجموعتين (س ، ص مثلا) تنتج مجموعة ثالثة عناصرها تنتمي الى المجموعة الأولى س ولا تنتمي الى المجموعة الثانية ص

يرمز لها بالرمز س – ص كما في المثال:

اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

فإن س – ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} – {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} = {١ ، ٣}


وتمثيلها بمخططان فن يكون هكذا:

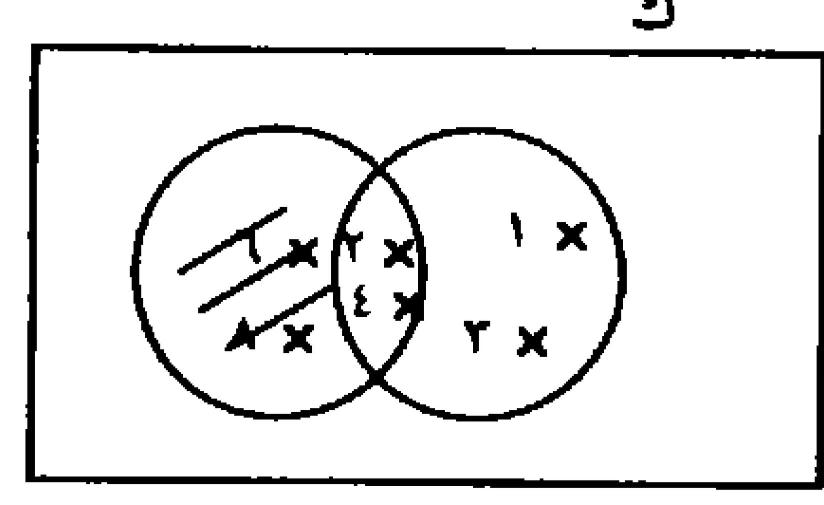


س - ص

ويمكن أن نجد ص –س كما يلي:

ص – س = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} – {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} = {٦ ، ٨}

وتمثيلها باشكال فن يكون هكذا:



ص - س

وكما هو واضح من الشكلين السابقين فإن:

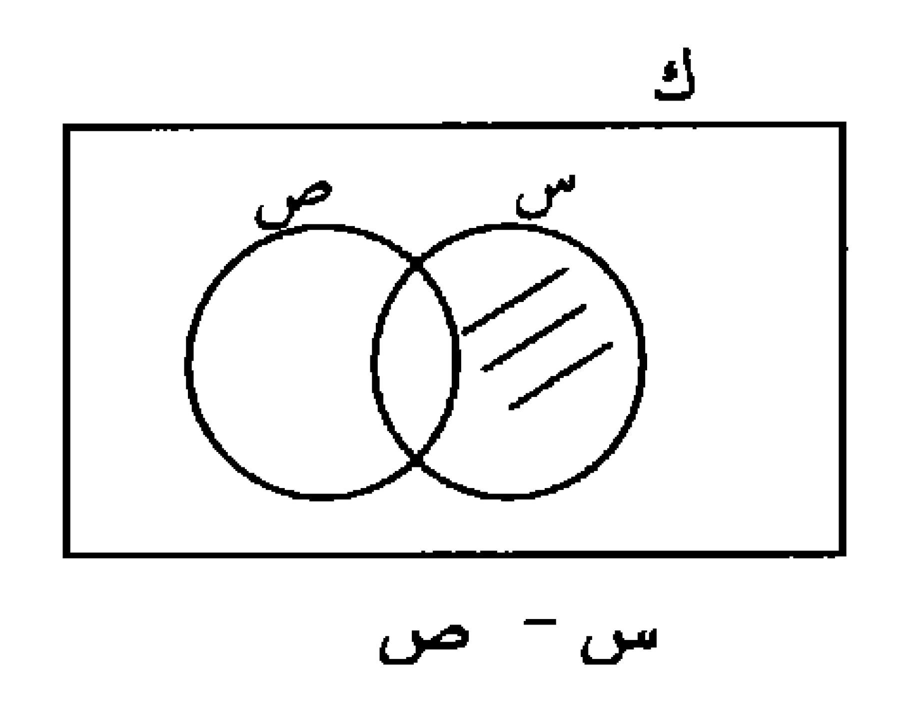
س − ص ≠ ص − س فعملية الفرق ليست تبديلية

كون: س − ص = {١ ، ٣} ، ص − س = {٦، ٨}

وان: {١ ، ٣} ≠ {٦ ، ٨}

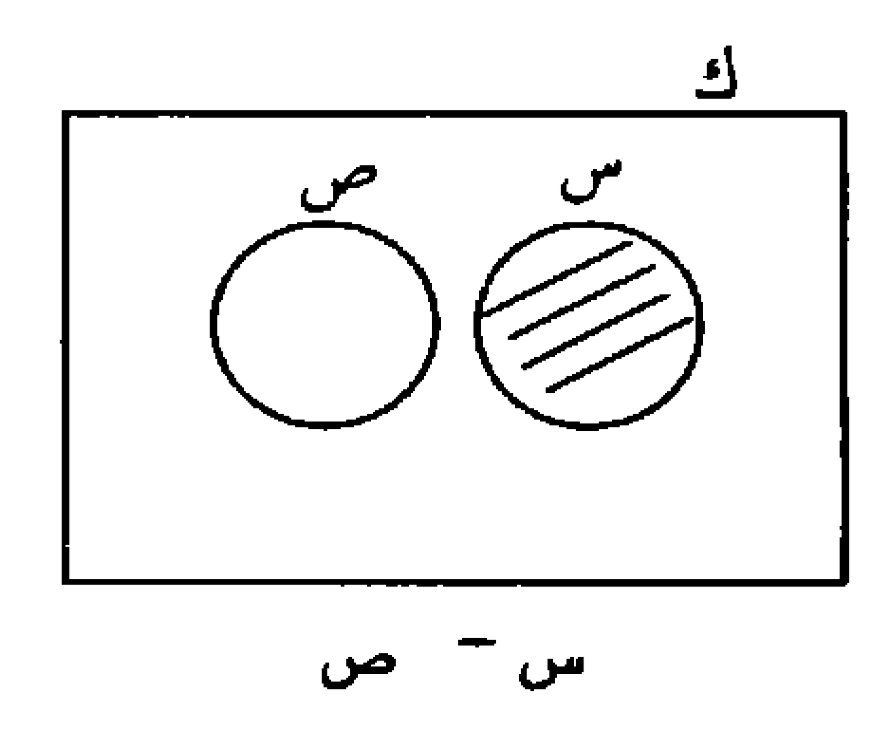
وبشكل عام تمثل مخططات فن التالية عملية الفرق بين المجموعتين س، ص في حالات عديدة حيث تمثل المناطق المظللة مجموعات الفرق في كل منها:

× اذا كان بين المجموعتين س ، ص عناصر مشتركة − مجموعات متقاطعة− .



س − ص

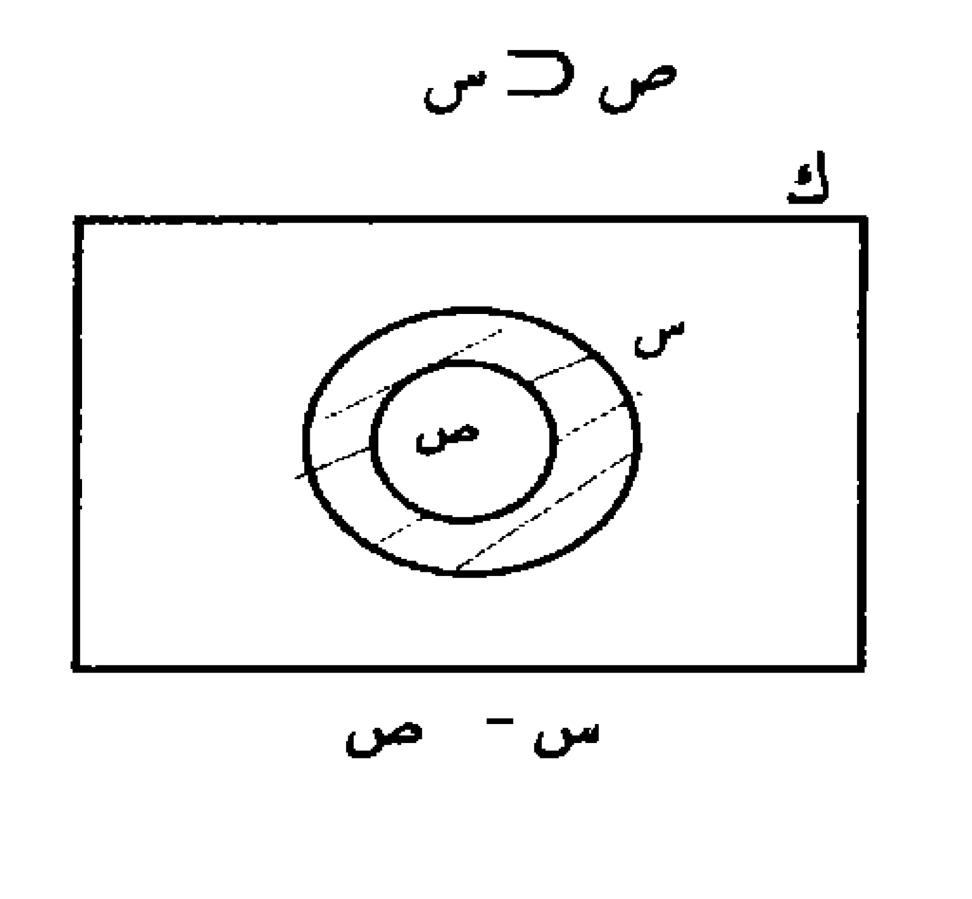
× اذا لا يوجد بين المجموعتين س ، ص عناصر مشتركة − مجموعات منفصلة.



س − ص

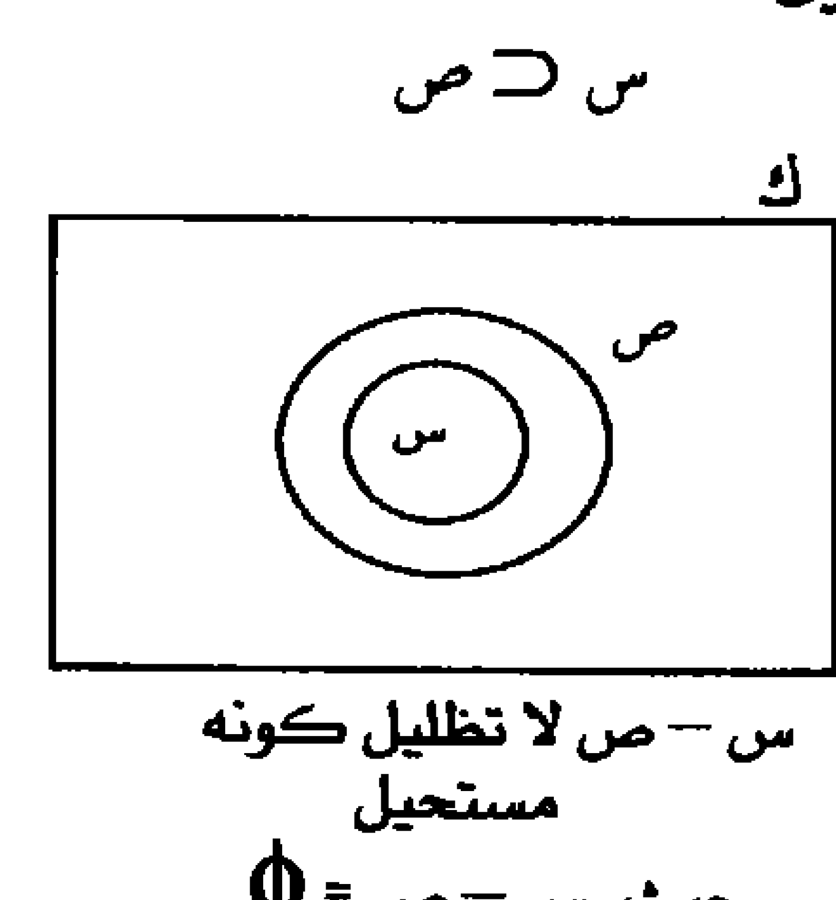
× اذا كانت احدى المجموعتين محتواه في الأخرى − متداخلتان− كما في الشكلين:

ص ⊂ س



س − ص

س ⊂ ص



س − ص لا تظليل كونه مستحيل

حيث س − ص = ϕ

والآن سنورد خصائص عملية الفرق بين المجموعات على شكل قوانين ونظريات مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

للمجموعات س = {١ ، ٢ ، ٣}، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}، ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ولأن:

س – ص = {١ ، ٢، ٣} – {٣ ، ٤، ٥} = {١ ، ٢}

ص – س = {٣ ، ٤ ، ٥} – {١ ، ٢، ٣} = {٤ ، ٥}

فإن:

س – ص ≠ ص – س فالفرق بين المجموعات ليس تبديلي.

× س – س = {١ ، ٢، ٣} – {١ ، ٢، ٣} = ϕ

وكذلك ص – ص = ϕ أيضاً

× س – ϕ = س وكذلك ص – ϕ = ص وهكذا

× ϕ – س = ϕ وكذلك ϕ – ص = ϕ وهكذا

× س – ك = ϕ حيث ك المجموعة الكلية أو الشاملة

× (س – ص) ⊇ س كون س – ص = {١، ٢} ، س = {١، ٢ ، ٣}

وكذلك (ص – س) ⊇ ص كون ص – س = {٤ ، ٥} ، ص = {٣، ٤، ٥}

(iv) **عملية الفرق التناظري** Symmetric Difference:

عملية الفرق التناظري بين مجموعتين س ،ص تنتج مجموعة ثالثة عناصرها تنتمي الى واحدة فواحدة فقط من المجموعتين وليس لكليهما على الاطلاق.

ويرمز لها بالرمز س Δ ص ويقرأ س دلتا ص ويمكن وصف المجموعة الناتجة هكذا:

س Δ ص = {ع: (ع ∈ س و ع ∈ ص) أو (ع ∈ س و ع ∈ ص)}

وبالرموز:

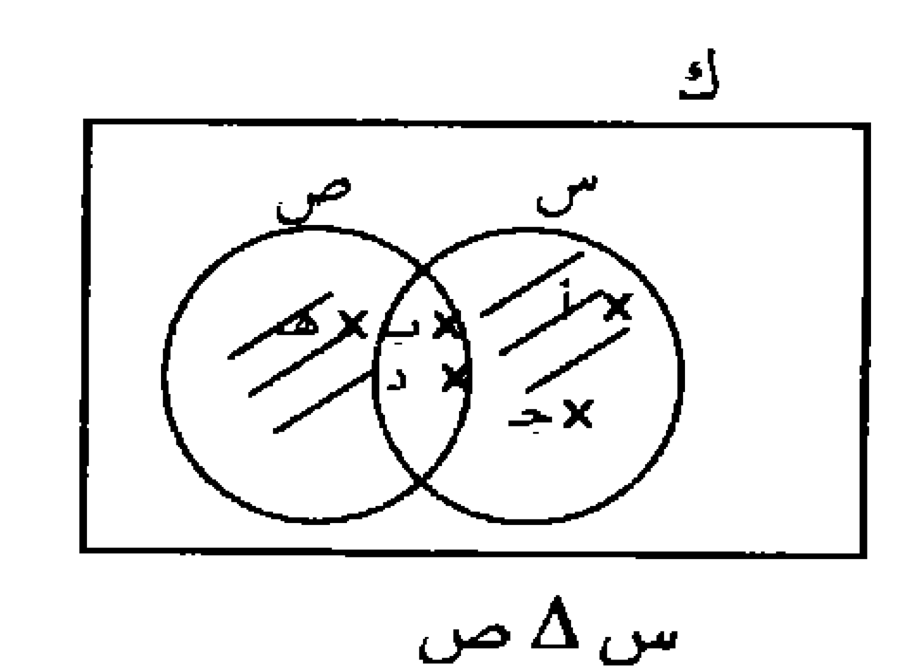
س Δ ص = (س − ص) ∪ (ص - س) حيث أو تترجم بلغة المجموعات الى عملية الاتحاد ∪.

مثال:

اذا كانت س = {أ ، ب ، جـ، د} ، ص = {ب ، د، هـ}

فإن س Δ ص = (س − ص) ∪ (ص - س) = { أ، جـ} ∪ {هـ} = {أ ، جـ ، هـ}

وتمثيلها بمخططات فن يكون هكذا حيث المنطقة المظللة تمثل المجموعة س Δ ص



س Δ ص

والآن سنورد خصائص عملية الفرق التناظري بين المجموعات على شكل توافيق ونظريات مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

للمجموعات س = {أ ، ب، جـ} ، ص = {ب ، جـ، د} ، ع = { ب، جـ ، هـ}

فإن:

× س Δ ص = (س - ص) ∪ (ص - س) = { أ ، د}

وكذلك ص Δ س = (ص - س) ∪ (س - ص) = { د، أ}

فإن: س Δ ص = ص Δ س فعملية الفرق التناظري تبديلية

× س Δ φ = φ Δ س = س حيث φ لا عناصر فيها وكأنها مجموعة محايدة.

× س Δ س = (س - س) ∪ (س - س) = φ ∪ φ = φ

× (س Δ ص) Δ ع =

= {أ ،د} Δ { ب ، جـ ، هـ}

= { أ ، د ، ب ، جـ ، هـ }

وكذلك س Δ (ص Δ ع) = س جـ { (ص – ع) ∪ (ع - ص)}

= { أ ، ب ، جـ} Δ ({د} {هـ})

= { أ ، ب ، جـ} Δ {د ، هـ}

= { أ ، ب ،جـ ، د ، هـ}

ومنها (س Δ ص) Δع = س Δ (ص Δ ع) فعملية الفرق التناظري تجميعية.

(v) **عملية الاتمام** Complement:

الاتمام عملية رياضية ترتبط بمجموعة واحدة مثل س لتنتج مجموعة أخرى تسمى متممة س ويرمز لها بالرمز سَ عناصرها تنتمي الى المجموعة الكلية ك ولا تنتمي الى المجموعة الأصلية س.

أي أن عناصر المجموعة سَ لا تنتمي الى المجموعة س اطلاقاً.

وهذا التعريف يحتم أن تكون العلاقة بين المجموعتين س ، سَ كما يلي:

سَ = ك – س حيث ك المجموعة الكلية.

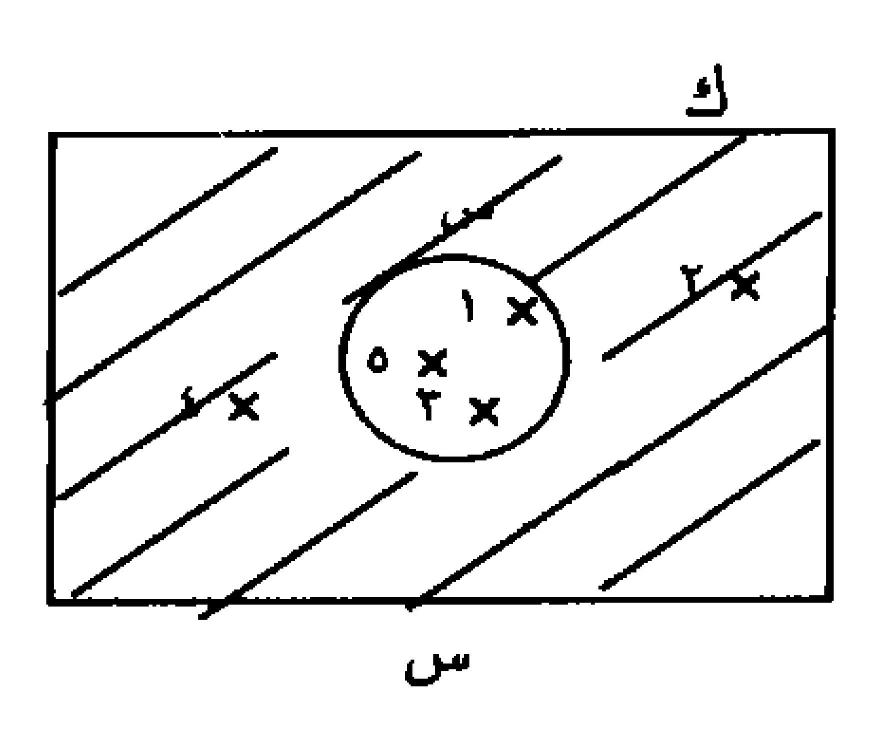
عندها تكون عناصر سَ ليست عناصر س ولا تشترك معها بأي عنصر كان.

مثال:

اذا كانت ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، س = { ١ ، ٣ ، ٥}

فإن سَ = ك- س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} –{ ١ ، ٣ ، ٥} = {٢ ، ٤}

وتمثيلها بمخططات فن كما يلي:



وهكذا فإن سَ = {أ : أ ∌ س دائماً وان أ ∋ ك }

فإذا كانت ك مجموعة سكان المعمورة وكانت س مجموعة الذكور في المعمورة فإن سَ هي مجموعة ا لاناث فيها.

فإذا كانت ك = ط* أي المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية

وكانت ز = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ...} مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية Even Numbers فيها

فإن زَ = {١ ، ٣، ٥، ...} مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية Odd Numbers فيها

وتسمى ف حيث ز = مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

حيث ف = مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

والعلاقة بينها: ف = زَ وكذلك ز = فَ

لأن ز ∪ ف = فَ ∪ زَ = ط* والميزة هنا خاصة وليست عامة} وللاعداد الفردية والزوجية.

والآن سنورد خصائص عملية الاتمام على شكل قوانين ونظريات مصحوبة نسبي من التوضيح والبيان:

للمجموعة ك = {١، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥} والمجموعة س = {١، ٣، ٥}

فإن:

سَ = ك- س = {٢ ، ٤} وتقرأ متممة س

(سَ)َ = ك – سَ = ك – (ك – س) = ك – ك + س = س

وبالرموز سَ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} – {١، ٣، ٥} = {٢، ٤}

(سَ)َ = ({٢، ٤})َ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} – {٢، ٤} = {١، ٣، ٥} = س

أي أن (سَ)َ = س وتقرأ متممة متممة س = س

وتسمى خاصية الارتداد للاتمام Involution

× (ك)َ = ϕ وكذلك (ϕ)َ = ك

× س ∩ سَ = ϕ كون {١، ٣، ٥} ∩ {٢، ٤} = ϕ

لأن من المستحيل وجود عناصر مشتركة بين المجموعة ومتتها.

×س ∪ سَ = سَ ∪ س = ك

كون {١، ٣، ٥}∪{٢، ٤} = {٤، ٢}∪{١، ٣، ٥} = {٢، ١، ٣، ٤، ٥} = ك

× اذا كانت المجموعة ع ⊇ ل فإن لَ ⊇ عَ

فعندما ع = {٧، ٨} ، ل = {٧، ٨، ٩} ، ك = {٦، ٧، ٨، ٩}

فإن {٧، ٨}⊇ {٧، ٨، ٩} من مفهوم الاحتواء

وان لَ = {٦، ٧، ٨، ٩} – {٧، ٨، ٩} = {٦}

وان عَ = {٦، ٧، ٨، ٩} – {٧، ٨} = {٦، ٩}

واضح ان {٦} ⊇ {٦، ٩}

أي أن لَ ⊇ عَ

× اذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، س = {١، ٢} ، ص = {٢، ٣}

فإن سَ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} – {١، ٢} = {٣، ٤، ٥}

وان صَ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} – {٢، ٣} = {١، ٤، ٥}

ولما كانت س ∪ ص = {١ ، ٢ ، ٣}

فإن $\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = وتقرأ المتممة الكلية لاتحاد المجموعتين س، ص

$\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = {ك - (س ∪ ص)} = {٤ ، ٥}

ولأن سَ ∩ صَ = {٣ ، ٤ ، ٥} ∩ {١ ، ٤ ، ٥} = {٤ ، ٥}

∴ $\overline{\text{س} \cup \text{ص}}$ = سَ ∩ صَ ⟵ (١)

قانونا دي مورغان للاتمام
De morgan's Laws

وبأسلوب مماثل فإن:

$\overline{\text{س} \cap \text{ص}}$ = سَ ∪ صَ ⟵ (٢)

ويمكن كتابة القانونين هكذا:

(س ∪ ص)َ = سَ ∩ صَ

وكذلك (س ∩ ص)َ = سَ ∪ صَ

{ انتبه لعكس الاشارتين ∪، ∩ عند فك القوسين }

أمثلة محلولة على جبر المجموعات

مثال:

للمجموعات ك ، س، ص يتبين أن:

$$س \cap (سَ \cup ص) = س \cap ص$$

الطرف الأيمن: $س \cap (سَ \cup ص)$ وباستخدام خاصية التوزيع

$= (س \cap سَ) \cup (س \cap ص)$ لكن $س \cap سَ = \phi$ لا عناصر فيها

$= \phi \cup (س \cap ص) = س \cap ص$ = الطرف الأيسر.

مثال:

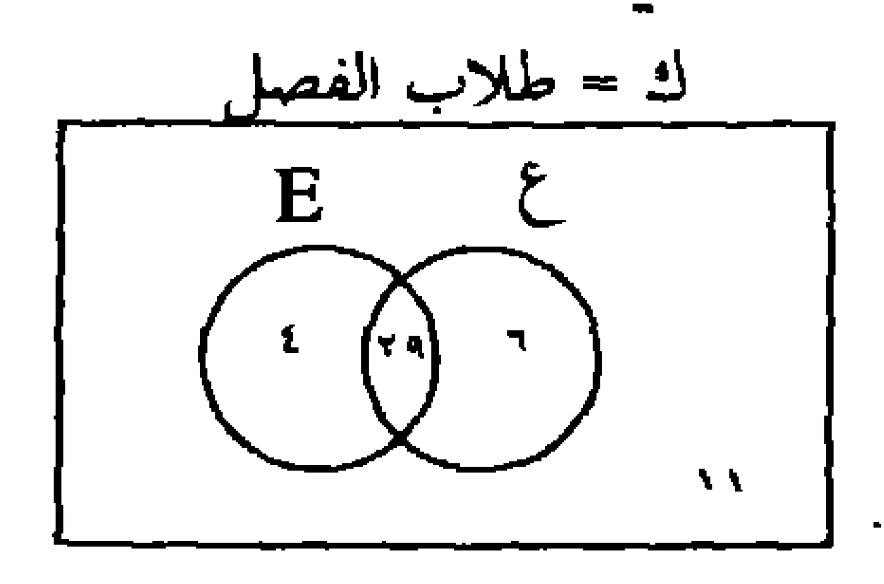
تقدم ٥٠ طالباً في أحد الفصول الدراسية لامتحان عام فنجح منهم في اللغة العربية ٣٥ طالب، وفي اللغة الانجليزية ٣٣ طالب وفي اللغتين (العربية والانجليزية) معاً ٢٩ طالب.

فأوجد: عدد الناجحين في اللغة العربية فقط.

عدد الناجحين في اللغة الانجليزية فقط.

عدد الذين لم يحالفهم الحظ في النجاح في اللغتين.

تمثل المعلومات الواردة في السؤال بمخططات فن كما يلي:



عدد الناجحين في اللغتين ٢٩ طالب

عدد الناجحين في العربية فقط ٣٥- ٢٩ = ٦ طلاب

عدد الناجحين في الانجليزية فقط ٣٣ - ٢٩ = ٤ طلاب

عدد الناجحين في العربية أو الانجليزية أو اللغتين معاً = ٦ + ٤ + ٢٩= ٣٩ طالب

عدد الذين لم يحالفهم الحظ في النجاح = ٥٠ – ٣٩ = ١ طالب

مثال:

اذا كانت ك = { ا ، ب، جـ ، د ، هـ ، و ، ن }

س = { أ ، ب، جـ ، د ، هـ }

ص = { أ ، جـ ، هـ ، ن}

ع = { ب ، هـ ، و ، ن}

فإن سَ = {و ، ن} ، ص = {ب ، د، و} ، عَ = {أ جـ ، د}

وان سَ – ص = {و ، ن} – { أ ، جـ ، هـ ، ن} = {د

وان (س ∩ سَ)´ = (ϕ)´ = ك

وان س ∪ (صَ ∩ ع) = س ∪ ({ب ، و}) = {ب}

مثال:

اذا كانت ك = {١، ٢ ، ٣، ٤، ٥}

جزئ المجموعة ك الى ثلاث مجموعات أ ، ب، جـ يجب تحقق الشروط التالية معاً.

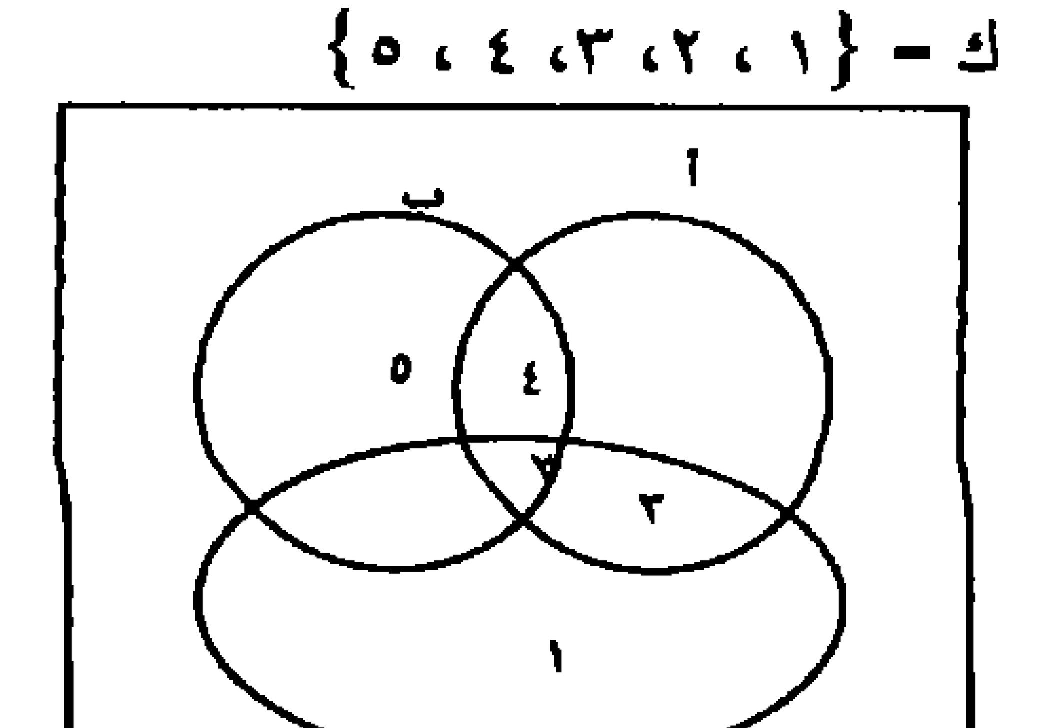
(i) أ ∩ ب = {٢ ، ٤}

(ii) أ ∩ جـ = {٢ ، ٣}

(iii) أ ∪ ب = {٢ ، ٣، ٤ ، ٥}

(iv) أ ∪ جـ = {١ ، ٢، ٣ ، ٤}

الحل:



ومن المخطط: أ = {٢ ، ٣ ، ٤}

ب = {٢ ، ٤ ، ٥}

جـ = {١ ، ٢ ، ٣}

(١- ١٠) الأزواج المرتبة Ordered Pairs:

الزوج المرتب كائن رياضي مؤلف من عنصرين هما س$_1$ ، ص$_1$ مأخوذين بالترتيب س$_1$ ثم ص$_1$ على الشكل (س$_1$ ، ص$_1$) بحيث يسمى العنصر س$_1$ المسقط الأول First Component ويسمى العنصر الثاني ص$_1$ المسقط الثاني Second Component فالزوج المرتب (س$_1$ ، ص$_1$) مكون من مسقطين هما:

س$_1$ المسقط الأول

ص$_1$ المسقط الثاني

أي أن (س$_1$ ، ص$_1$) $\neq$ (ص$_1$ ، س$_1$) كون الترتيب اختلف في الزوجين المرتبين

وعليه فإن (١ ، ٢) $\neq$ (٢ ، ١) كون كل منهما زوج مرتب يختلف عن الآخر.

هذا ومن الأزواج المرتبة يمكن تكوين مجموعة جديدة تسمى مجموعة الضرب الديكارتي Cartesian Product.

فالضرب الديكارتي لمجموعتين س ، ص هي مجموعة ثالثة س × ص (وتقرأ س ضرب ص) حيث:

(س × ص) = {(س$_1$ ، ص$_1$) : س$_1$ $\in$ س و ص$_1$ $\subset$ ص}

وعناصر هذه المجموعة هي الأزواج المرتبة.

وعندما تكون مساقط الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية ح فإنه يرمز لمجموعة الضرب الديكارتي كما يلي:

ح × ح = { (س$_1$ ، ص$_1$): س$_1$ $\in$ ح و ص$_1$ $\in$ ح أيضاً}

مثال:

اذا كانت س = {١ ، ٢} ، ص = {١ ، ٣}

فإن س × ص = {١، ٢} × {١ ، ٣} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣)، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣)}

وان ص × س = {١، ٣} × {١ ، ٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢)، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢)}

أي أن س × ص ≠ ص × س فحاصل الضرب الديكارتي ليس تبديلي.

وان س × س = {١، ٢} × {١ ، ٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢)، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

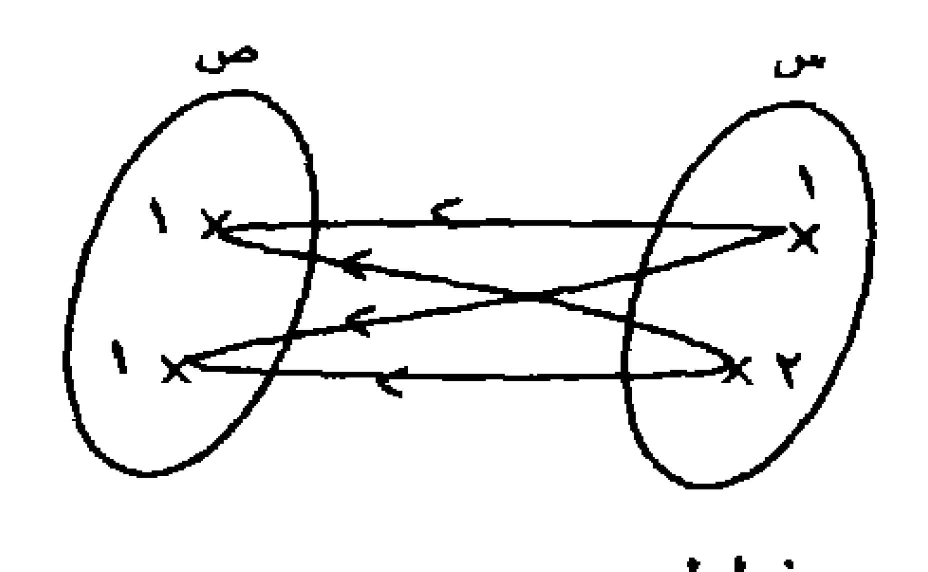
وان ص × ص = {١، ٣} × {١ ، ٣} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣)، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣)}

هذا ويمكن تمثيل الضرب الديكارتي للمجموعة س × ص أعلاه بالطرق التالية:

(i) طريقة التمثيل الجدولي بأن نضع عناصر المجموعة س كأعمدة راسية وعناصر المجموعة ص كأسطرٍ أفقية كما في الشكل.

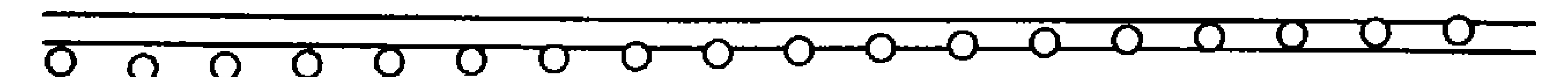
×	١	٣	= ص
١	(١، ١)	(١، ٣)	
٢	(٢، ١)	(٢، ٣)	
س			

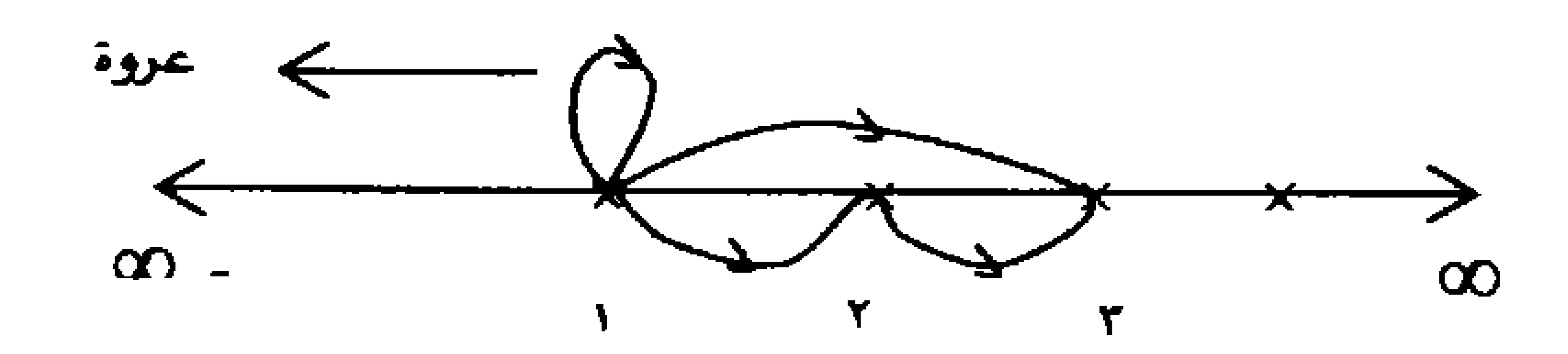
(ii) طريق التمثيل السهي وذلك بأن نرسم مخطط فن لكل مجموعة ونصل المساقط الأولى من عناصر المجموعة س بالمساقط الثانية من عناصر المجموعة ص كما في الشكل:



مخطط سهي

(iii) هذا ويمكن تمثيل مجموعة الضرب الديكارتي بمخطط سهمي على خط الاعداد الحقيقية كما يلي:





وعندما يرتبط العنصر بنفسه أي (١ ، ١) فإننا نسمي الشكل أعلاه عروة Loop حيث العدد ١ كمسقط أول وكمسقط ثاني.

هذا ويتساوى الزوجان المرتبان (س$_١$ ، ص$_١$) ، (س$_٢$ ، ص$_٢$) اذا، فقط اذا كان المسقط الأول س$_١$ = المسقط الأول س$_٢$ في الزوجين المرتبين

والمسقط الثاني ص$_١$ = المسقط الثاني ص$_٢$ في الزوجين المرتبين

أي أن س$_١$ = س$_٢$ ، ص$_١$ = ص$_٢$

أي أن (س$_١$ ، ص$_١$) = (س$_٢$ ، ص$_٢$) شرطا تساوي الأزواج المرتبة.

مثال:

ما قيمة س ، ص اذا كان (س ، ١) = (٢ ، ص)

من تساوي الزوجين المرتبني تتساوى المساقط الأول مع بعضها

أي أن س = ٢ والمساقط الثاني مع بعضها أي أن ص =١

مثال:

اذا كانت س = {١ ، ٢، ٣} ، ص = {أ ،ب }

فإن س× ص = {١ ، ٢، ٣} × {أ ،ب} = { (١ ،أ) ، (١ ،ب) ، (٢ ، أ) ، (٢ ،ب) ، (٣ ، أ) ، (٣ ،ب)}

لاحظ أن عدد عناصر س × ص = ٣ × ٢ = ٦ أزواج مرتبة

وأن عدد عناصر س × س = عدد عناصر س × عدد عناصر س

= ٣ × ٣ = ٩ أزواج مرتبة.

من هنا يمكن ايجاد عدد عناصر مجموعة الضرب الديكارتي لمجموعة أو أكثر اذا كانت محدودة فقط – بأن نضرب عدد عناصر كل من المجموعات المكونة لحاصل الضرب الديكارتي كما يلي:

اذا كان عدد عناصر المجموعة س = ٥ وعدد عناصر المجموعة ص = ٤

فإن عدد عناصر المجموعة س × ص = ٥ × ٤ = ٢٠ زوج مرتب

وكذلك عدد عناصر المجموعة ص × س = ٤ × ٥ = ٢٠ زوج مرتب

وعدد عناصر المجموعتين س ، ص يساوي $ن_١$ ، $ن_٢$ على التوالي

فإن عدد عناصر س × ص وكذلك ص × س هو ن × $ن_٢$ أو $ن_٢$ × $ن_١$ وكلاهما متساويان.

◘ والآن سنورد خصائص مجموعة الضرب الديكارتي على شكل قوانين ونظريات مصحوبة بالبيان والتوضيح كما يلي:

للمجموعات س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٤ ، ٥} ، والمجموعة الخالية ايضاً:

ع = {١ ، ٢ ، ٤} فإن:

× س × ص ≠ ص × س فالضرب الديكارتي غير تبديلي

× س × ϕ = ϕ × س = ϕ كون لا عناصر بها، حالة خاصة تجعل الضرب الديكارتي فيها تبديلي.

× لإيجاد س × (ع ∪ ص) نقول:

س × {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥} = {١ ، ٢ ، ٣} × {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥} ..... (٢)

ولإيجاد (س × ع) ∪ (س × ص) نقول:

{١ ، ٢ ، ٣} × {١ ، ٢ ، ٤} ∪ {١ ، ٢ ، ٣} × {١ ، ٤ ، ٥}

كون {١ ، ٢ ، ٣} مشترك

({١ ، ٢، ٣}) × {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥} .... (٢)

فالطرفان س × (ع ∪ ص) = (س × ع) ∪ (س × ص)

فالضرب الديكارتي توزيعي بالنسبة لعملية الاتحاد

وكذلك س × (ع ∩ ص) = (س × ع) ∩ (س × ص)

والضرب الديكارتي توزيعي بالنسبة لعملية التقاطع

(تحقق من ذلك)

× اذا كان عدد عناصر المجموعة س هو $ن_١$

وكان عدد عناصر المجموعة ص هو $ن_٢$

فإن:

عدد عناصر المجموعة س × ص = $ن_١ × ن_٢$

عدد عناصر المجموعة ص × س = $ن_٢ × ن_١$

عدد عناصر المجموعة س × س = $ن_١ × ن_١$

عدد عناصر المجموعة ص × ص = $ن_٢ × ن_٢$

وهكذا...

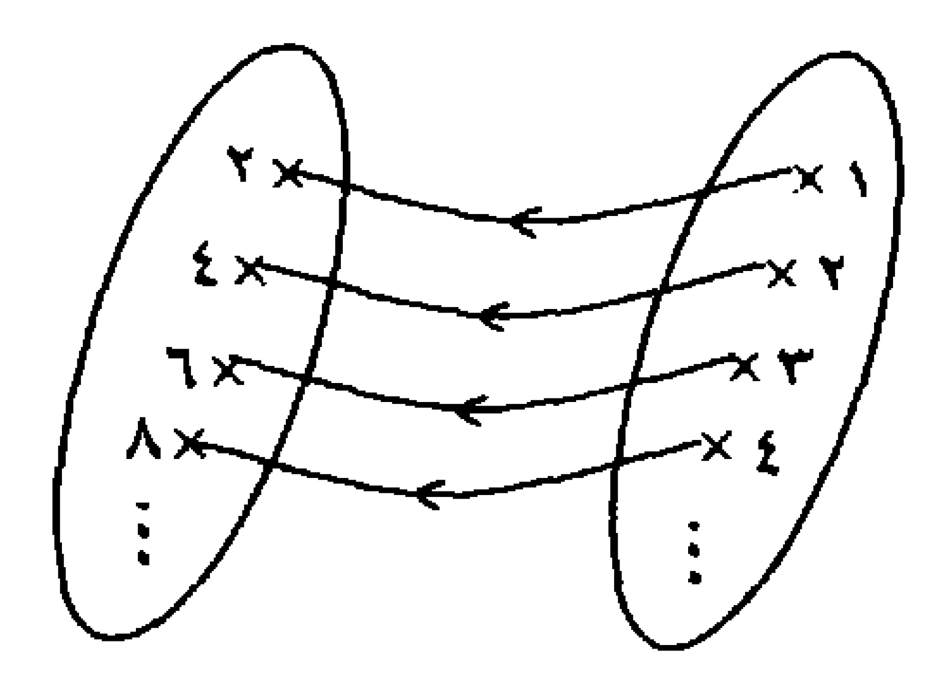
(١- ١١) العلاقات Relations:

والعلاقة إما أن تكون أحادية أو ثنائية وتفسير كل منهما كما يلي:

العلاقة الأحادية:

وهي ارتباط بين عناصر مجموعتين تسمى الأولى منها المجال Domain وتسمى الثانية Range كأن تكون علاقة مساواة أو تباين أو أي خاصية تربط بين مجموعتين فقط، فإذا كوّنا من مجموعة الأعداد الطبيعية ط* = {١ ، ٢ ، ٣، ٠٠٠} مجموعة الأعداد الزوجية ز = {٢ ، ٤ ، ٦، ٠٠٠} فإننا نقول بأننا عرفنا علاقة خاصة على مجموعة الأعداد الطبيعية وهذه العلاقة ع تقسم المجموعة ط* الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين هما الأولى ز تحقق العلاقة المذكورة. والثانية ف مجموعة الأعداد الفردية ف = {١ ، ٣ ، ٥، ٠٠٠} والتي لا تحقق هذه العلاقة.

والتمثيل باشكال فن:



وهكذا تسمى هذه العلاقة ع : ط* ⟵ ز

علاقة أحادية معرفة على المجموعة المفروضة ط*

وأما العلاقة الثنائية Binary Relation:

فهي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين س ، ص مثلاً أي أن العلاقة ع: مجموعة جزئية من س × ص وتسمى العلاقة من س الى ص كما في المثال:

إذا كانت س = {٢ ، ٣، ٥}، ص = {١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٩}

فإن:

$ع_{١}$ = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠)} وقاعدتها ص = ٢س

$ع_{٢}$ = {(٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥)} وقاعدتها ص = س

$ع_{٣}$ = {(٢ ، ٧) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ١٠)} ولا قاعدة لها على الاطلاق

وإذا كان العنصر (أ ، ب) ينتمي الى العلاقة المعنية ع فإننا نعبر عنه بالرمز $أ_{ع}$ب أو (أ ، ب) ∋ ع كأن نقول:

$^{٢}ع_{١}{}^{٤}$ أي أن (٢ ، ٤) ∋ $ع_{١}$ كما في العلاقة الأولى

وكذلك $^{٢}ع_{٢}{}^{٢}$ أي أن (٢ ، ٢) ∋ $ع_{٢}$ كما في العلاقة الثانية

ومن الملاحظ أن مجموعة المساقط الأول في العلاقة تسمى المجال

ومجموعة المساقط الثانية تسمى المدى

فمجال $ع_{١}$ هو {٢ ، ٣، ٥} ومداها {٤ ، ٦ ، ١٠}

ومجال $ع_{٢}$ هو {٢ ، ٣، ٥} ومداها {٢ ، ٣ ، ٥}

فمجال $ع_{١}$ هو {٢ ، ٣} ومداها {٧ ، ٥ ، ٢ ، ١٠}

وللعلاقات الثنائية من الخواص ما هو العديد ولكن سنحصرها بشكل موجز ومفيد كما يلي:

للمجموعة س = {١ ، ٢، ٣} ومجموعة الضرب الديكارتي لها:

س × س = {(١،١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢، ١)، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٠) ، (٣ ،٢) ، (٣، ٣)}

فإذا كان:

× للمتغير س١ علاقة ع١ مع نفسه كما يلي س١ ع س١، فالعلاقة ع١ تسمى علاقة انعكاس Reflexive Relation. كعلاقة المساواة ع١ = {(١ ، ١) ، (٢، ٢) ، (٣ ، ٣)}

إذ يسمى كل زوج مرتب منها حيث ١ ع١ ١ ، ٢ع١ ٢ ، ٣ع١ ٣ عروة Loop وتمثل هذه العلاقة بمخطط سهمي عددي هكذا:

بحيث أن عدد العُرى يساوي عدد عناصر المجموعة س

وفي هذا المثال ٣ عُري فقط.



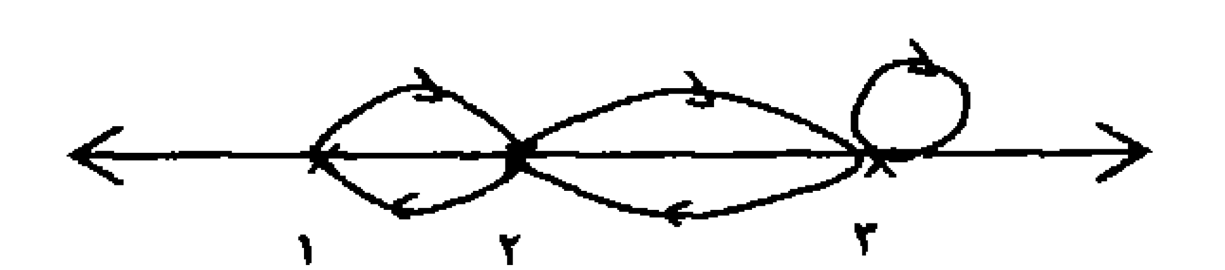
أما علاقات التباين < (أصغر من) أو > (أكبر من) فليست علاقات انعكاس.

وإذا كان للمتغير س١ علاقة ع٢ مع المتغير س٢ وكذلك كان في نفس العلاقة ع ، للمتغير س٢ مع المتغير س١ هكذا:

س١ ع٢ س٢ ⟵ س٢ ع٢ س١ فالعلاقة تسمى علاقة تناظر Symmetric Relation

كالعلاقة ع٢ = {(١، ٢) ، (٢، ٢) ، (٣ ، ٢)، (٢ ، ٣) ، (٣، ٣)}

وتمثيلها بمخطط سهمي عددي كما يلي:



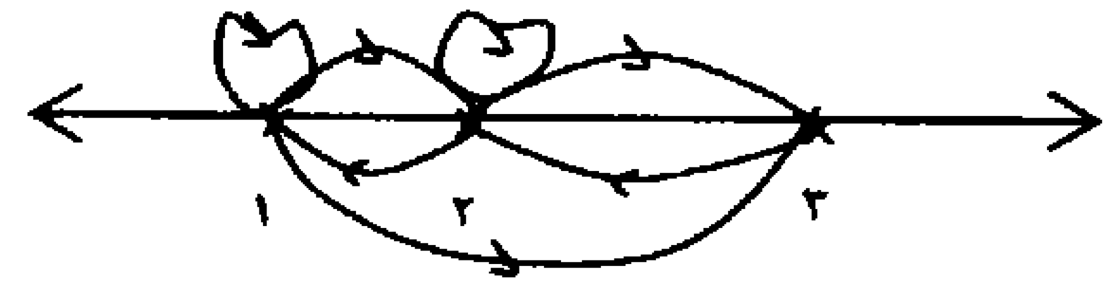
ثم اذا كان للمتغيرات س١ ، س٢ ،س٣ الارتباطات التالية في العلاقة ع٢:

س١ ع٢ س٢ وكذلك س٢ ع٢ س٣ وكان س١ ع٢ س٣

تكون العلاقة ع٢ علاقة تعد Transitive Relation

كالعلاقة ع٢ = {(١، ٢)، (٢ ، ١)، (١ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٢)، (٢ ، ٢)،(١ ، ٣)}

وتمثيلها بالمخطط السهمي:



فعلاقة المساواة ان كنت لا تدري علاقة تعدي كون:

$س_{١} = س_{٢}$ ، $س_{٢} = س_{٣}$ $\longrightarrow$ $س_{١} = س_{٣}$

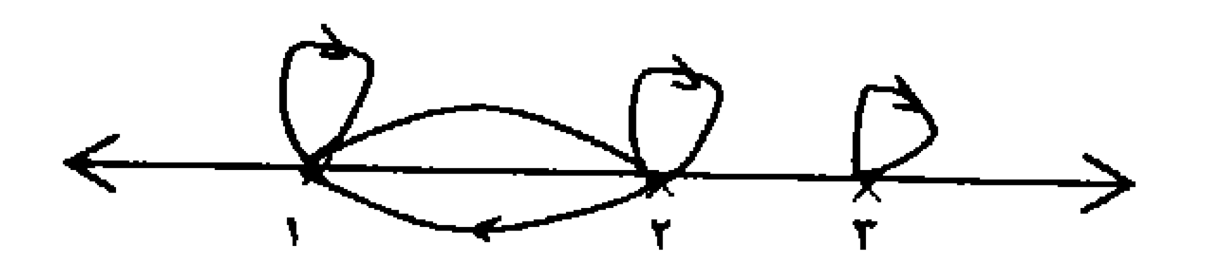
وأخيراً اذا كانت العلاقة $ع_{٤}$ علاقة انعكاس (كما في ع)

وعلاقة تماثل كما في $ع_{٢}$ وعلاقة تعد كما في $ع_{٣}$

فإن العلاقة $ع_{٤}$ تسمى علاقة تكافؤ Equivalence Relation

كالعلاقة $ع_{٤}$ = {(١، ٢) ، (٢، ١) ، (١، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٣)}

وتمثيلها بالمخطط السهي العديد



فعلاقة المساواة على أي مجموعة من المجموعات العددية (ط*، ط، س، ك، ح)

وعلاقة التشابه على مجموعة من جميع المثلثات المرسومة في مستوى واحد.

ثم علاقة التوازي على مجموعة الخطوط المستقيمة المستوية.

جميع هذه العلاقات (المساواة، التشابه، التوازي) علاقات تكافؤ.

وأما علاقات التباين مثل أكبر من > ، وأصغر من < فليست علاقات تكافؤ.

هذا وتستخدم علاقات التكافؤ بشكل عام في التصنيف الرياضي وتكون ما يسمى بصفوف التكافؤ Equivalence Classes .

فالأشكال الهندسية مثلاً تُقسم الى صفوف تكافؤ من حيث الشكل والخواص الى:

مثلثات ، مربعات ، مستطيلات ، دوائر ، وغيرها.

والأعداد الصحيحة ص مثلاً تقسم بواسطة علاقة التكافؤ الى مجموعتين هما:

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ز

ز = { ٠ ، ± ٢ ، ± ٤ ، ± ٦ن ٠٠٠ }

ومجموعة الأعداد الفردية ف

ف = {± ١ ، ± ٣ ، ± ٥ ، ٠٠٠ }

وأما تمثيل العلاقات الثنائية يكون كما يلي:

فإذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

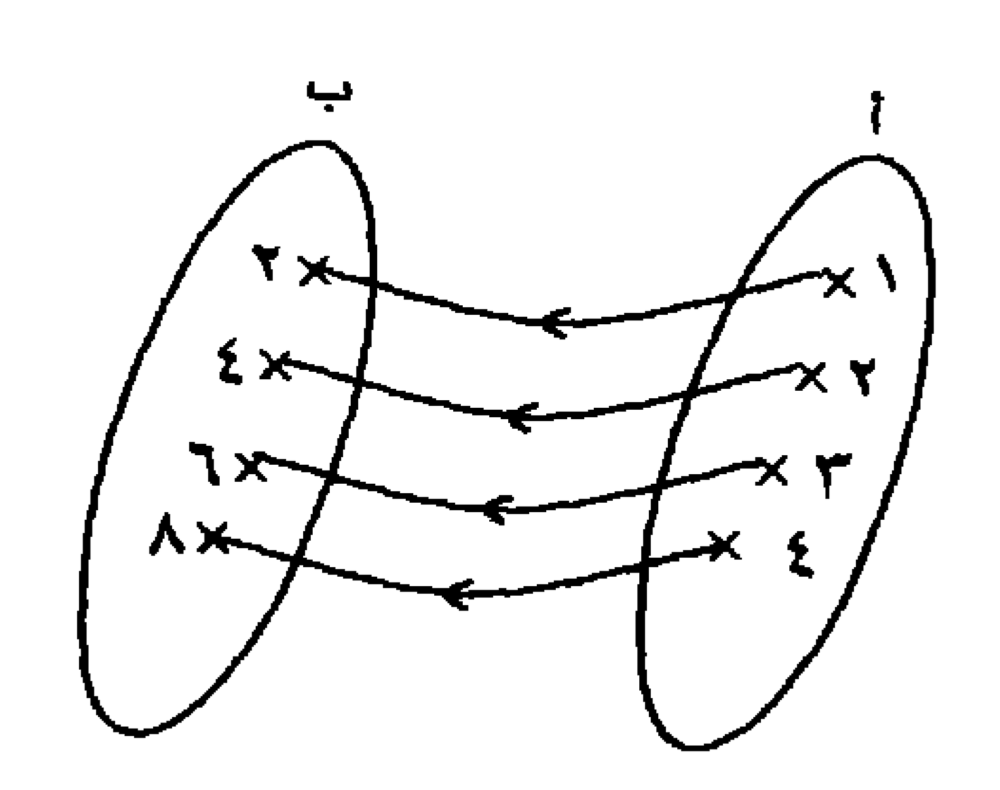
وكانت العلاقة ع٠ من أ الى ب حسب القاعدة ص = ٢س

فإن العلاقة ع تمثل بالطرق التالية:

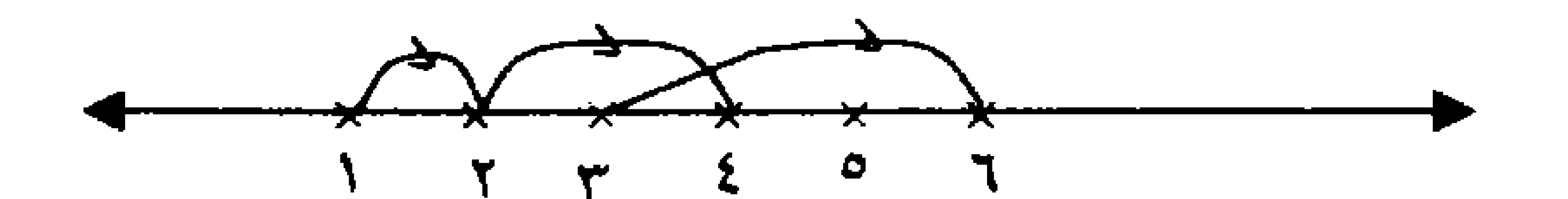
أولاً: بطريقة الأزواج المرتبة:

ع = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

ثانياً: بطريقة المخطط السهي هكذا:



ثالثاً: بطريقة المخطط السهمي العددي هكذا:



مثال:

اذا كانت س = {أ ، ب ، جـ} حدد العلاقة ع من حيث هي انعكاس، تماثل ، تعدي ، تكافؤ.

ع$_1$ = {(أ ، أ) ، (ب ،ب) ، (جـ ، جـ) ، (أ ، ب)} جواب: انعكاس وتعدي

ع$_2$ = { (أ ، أ) ، (جـ ، جـ) } جواب: تماثل، تعدي

ع$_3$ = { (ب ، ب)} جواب: تماثل ، تعدي

ع$_4$ = { (أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (جـ ، جـ)} جواب: "تكافؤ" "كونها انعكاس وتماثل وتعدي"

(١ - ١٢) الاقترانات Functions:

سنناقش مفهوم الاقتران كونه من أهم المفاهيم الرياضية وأكثرها فائدة وأوسعها انتشاراً في الرياضيات.

والاقتران علاقة بين عناصر مجموعتين مثل أ ، ب بحيث يرتبط فيه كل عنصر من عناصر المجموعة أ بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة ب ، لذلك يقال الاقتران من المجموعة أ الى المجموعة ب.

وعندها تصبح المجموعة أ مجاله Domain والمتغير فيها يسمى:

المتغير المستقل Independent

وتصبح المجموعة ب مداه Range والمتغير فيها يسمى:

المتغير التابع Dependent Variable

ويرمز للاقتران بالرمز ص= ق (س) حيث:

س متغير مستقل

ص متغير تابع

والاقترانات التي مجالها ومداها مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية ح تسمى:

الاقترانات الحقيقية Real Functions

ويتمدد الاقتران الحقيقي بقاعدة معينة تربط متغيرة التابع بمتغيره المستقل هكذا:

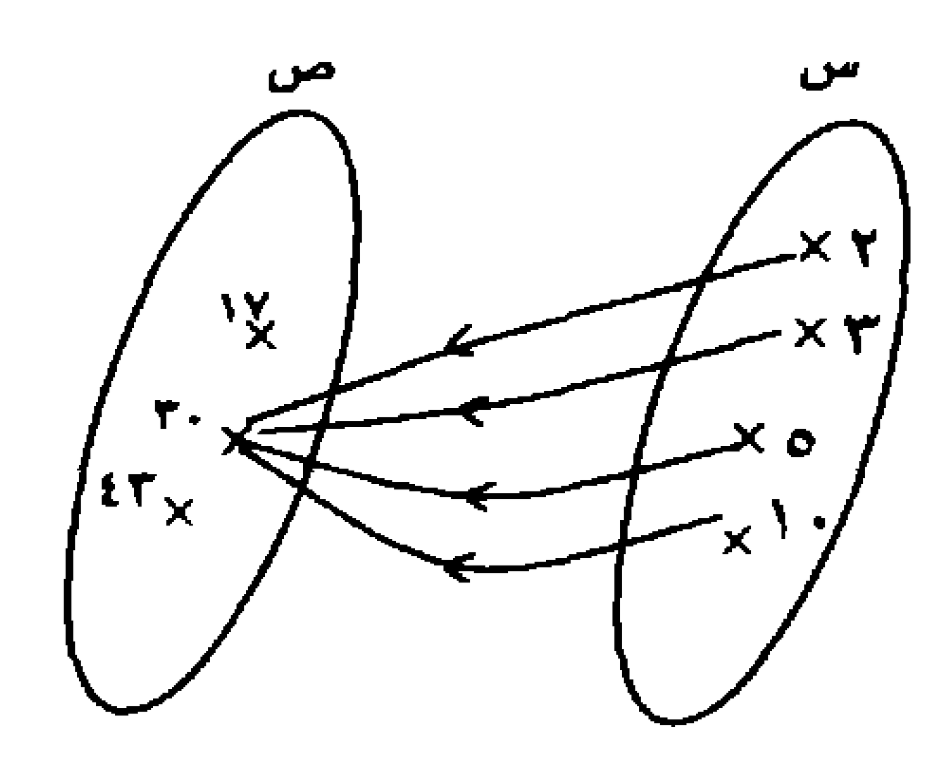
ق (س) = $س_٢$ مثلاً ولكن ليس دائماً.

في هذه المقدمة على الاقتران سنناقش بإيجاز بعض أنواعه كما يلي:

× **الاقتران الثابت Constant Function:**

اذا كانت س = {٢ ، ٣، ٥ ، ١٠} ، ص = {١٧ ، ٣٠ ، ٤٣}

فالاقتران المعرف بالقاعدة، كل عنصر من المجموعة ص من مضاعفات عنصر من المجموعة س هكذا:



أي أن جميع العناصر في المجموعة س ترتبط بالعنصر ٣٠ من المجموعة ص أي أن مجاله المجموعة س ومداه العنصر ٣٠ فقط من المجموعة ص.

وبما أن العدد ٣٠ هو صورة لجميع عناصر المجموعة س في هذا الاقتران ويعبر عنه هكذا:

ق (٢) = ٣٠ ، ق (٣) = ٣٠ ، ق (٥) = ٣٠ ، ق (١٠) = ٣٠

× **الاقتران المحايد Identity Function:**

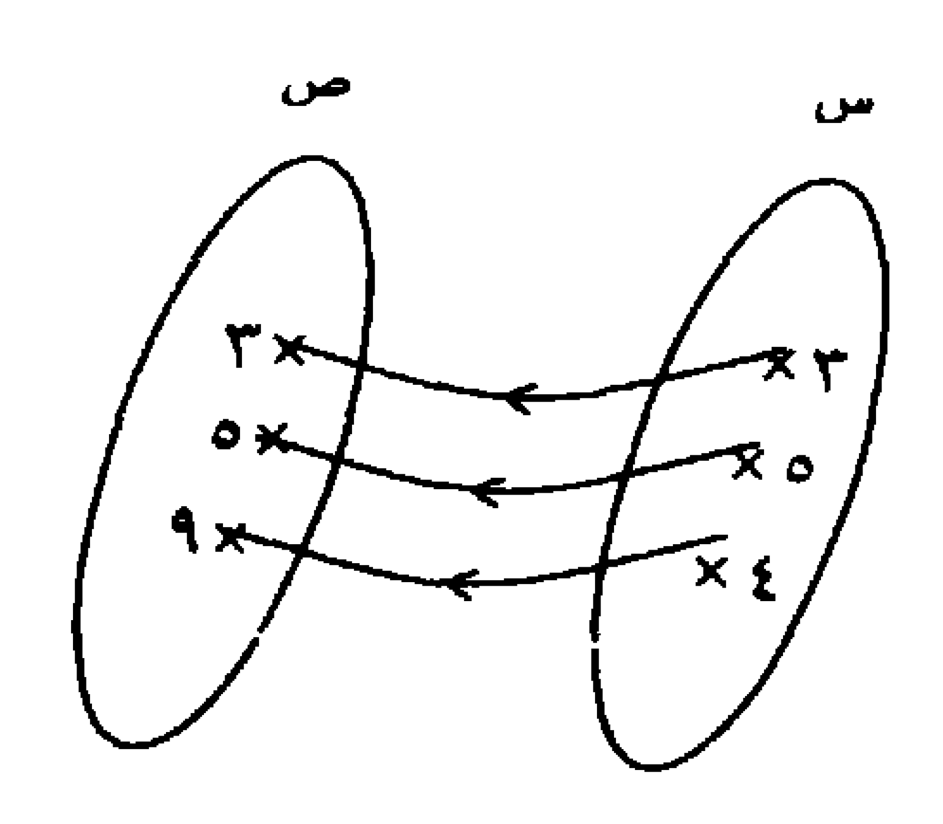
مثال:

اذا كانت س = {٣ ، ٥ ، ٩} وكانت قاعدة الاقتران ق (س) = س

وكان الاقتران من س الى س فإن:

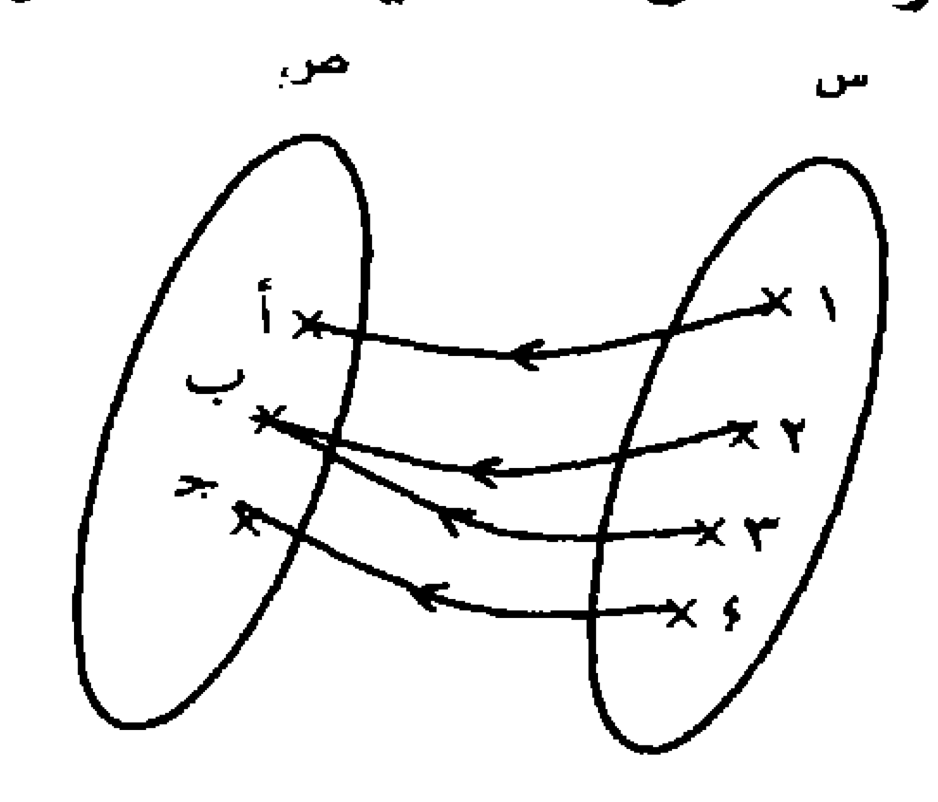
ق (٣) = ٣ ، ق (٥) = ٥ ، ق (٩) = ٩

أي أن العنصر يرتبط بنفسه أو العنصر صورة نفسه كما في الشكل:



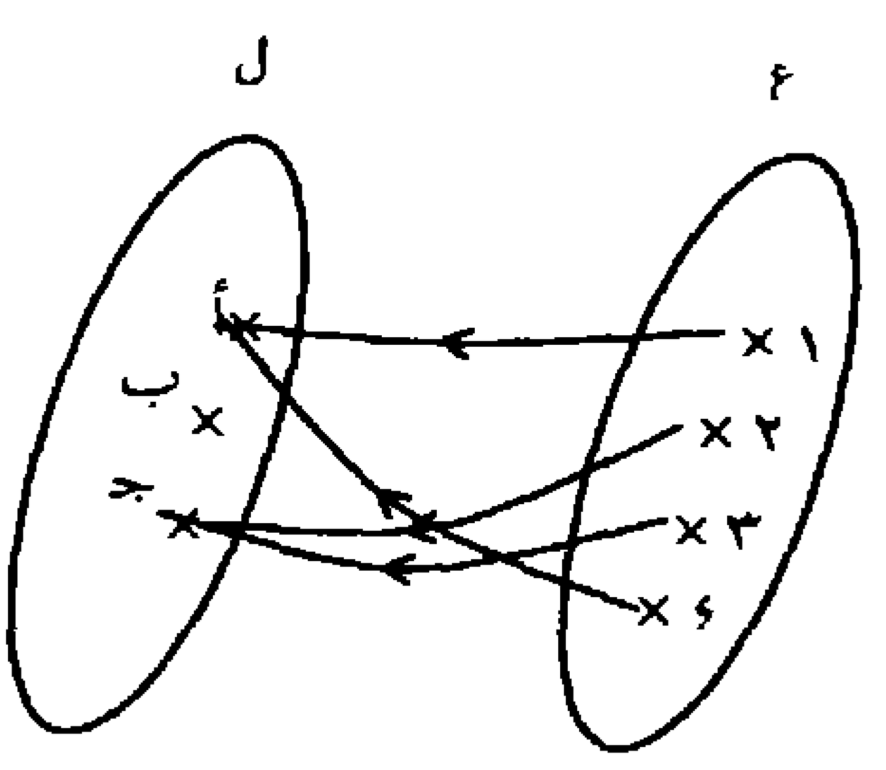
× اقتران شامل Onto Function:

هو الاقتران الذي تكون فيه جميع عناصر المدى صوراً لعناصر المجال دون زيادة أو نقصان كما في الأشكال:



"اقتران شامل"

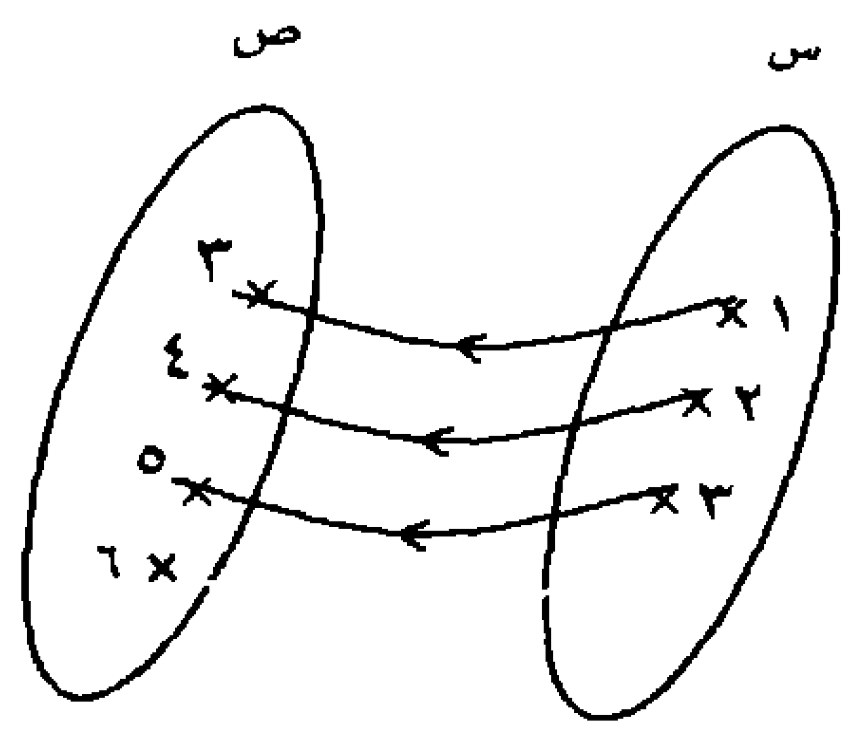
أما



"اقتران غير شامل"
حيث الصفر ب ليس صورة
لأي عنصر في المجال

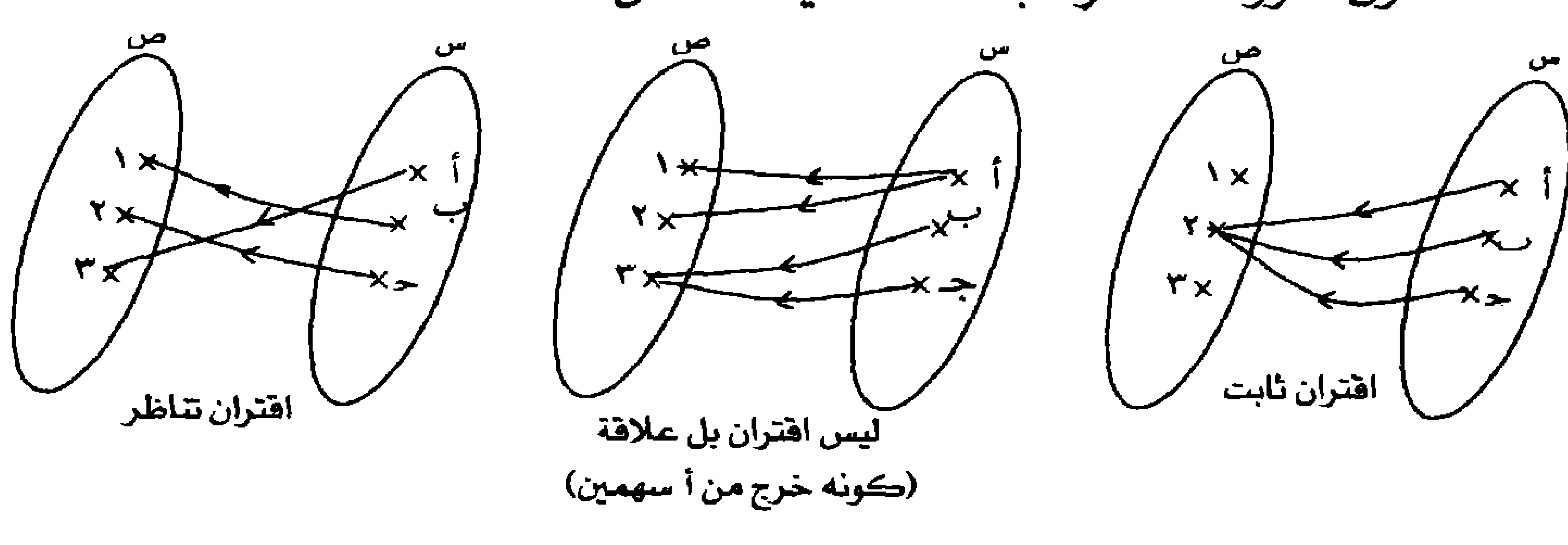
× اقتران واحد لواحد One- one Function:

هو الاقتران الذي يكون فيه لكل عنصر في مجاله صورة واحدة في مداه وليس شاملاً هكذا:



× اقتران تناظر One- one and Function:

هو الاقتران الأهم من غيره من الاقترانات، وهو اقتران شامل أولاً ثم واحد لواحد ثانياً. أي أن كل عنصر في مجاله يرتبط بصفر واحد في مداه. وجميع عناصر مداه تكون صوراً لعناصر مجاله كما في الشكل:



اقتران ثابت

ليس اقتران بل علاقة
(كونه خرج من أ سهمين)

اقتران تناظر

(١- ١٣) الأنظمة الرياضية Mathematical Systems:

والنظام الرياضي اثنان هما:

× نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة، وهو زوج مرتب، مسقطه الأول مجموعة غير خالية – مملوءة Full- ومسقطه الثاني عملية رياضية ثنائية مثل النظام الرياضي التالي (ط˟ ، +) حيث:

ط˟ مجموعة غير خالية كونها ط˟ = {١ ، ٢، ٣، ...} مجموعة الأعداد الطبيعية.

+ عملية الجمع والتي تربط كل زوج مرتب من عناصر مجموعة الضرب الديكارتي (ط˟ × ط˟) بعنصر واحد فقط من المجموعة ط˟

وبالرموز ط˟ × ط˟ $\xleftarrow{\text{عملية الجمع}}$ ط˟

ومثاله (٢ ، ٣) $\xleftarrow{\text{٢}}$ ٥

حيث ٢ + ٣ = ٥ كما هو معروف سابقاً.

× × نظام رياضي ذو عمليتبن ثنائيتين وهو ثلاثي مرتب،

مسقطه الأول مجموعة غير خالية – مملوءة full - مثل ح الأعداد الحقيقية.

ومسقطاه الثاني والثالث عمليتان كل منهما ثنائية مثل النظام الرياضي.

(ح، + ، ×) مع ملاحظة أن (ح ، +) نظام رياضي ذو عملية.

و (ح˟ ، ×) نظام رياضي ذو عملية.

ومنه النظام الرياضي (ح، + ، ×) نظام رياضي ذو عمليين.

مثل ٢ + ٣ = ٥ في هذا النظام.

وكذلك ٢ × ٣ = ٦ في هذا النظام.

ومن أشهر الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة النظام:

(ط* ، +) والنظام (ط* ، ×).

لذا فإنني سأناقش العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الطبيعية ط* وعلى وجه الخصوص عملية الجمع (+) وعملية الضرب (×) كما يلي:

يُعتبر العدد الطبيعي أول مفهوم رياضي أوجده الانسان، بسبب حاجته الماسة لتعداد الأشياء المحيطة به من كل جانب وفي كل مكان.

أما عملية الجمع Addition على مجموعة الأعداد الطبيعية ط* فإنها تُعرّف كما يلي:

(س ، ص) ⟵(+ الجمع) س + ص ، لكل س ، ص ∈ ط*

وأما عملية الضرب Multiplication على مجموعة الأعداد الطبيعية ط* فإنها تعرّف كما يلي:

(س ، ص) ⟵(× الضرب) س × ص لكل س ، ص ∈ ط*

ويمكن أن تكتب س × ص على الشكل س . ص أو س ص.

كون العملية الثنائية (+) تربط كل زوج مرتب (س ، ص) ∈ ط* × ط* بصفر واحد يسمى س + ص ∈ ط*

ومثاله: (٢ ، ٣) ⟵(+) ٢ + ٣ = ٥ ∈ ط*

وكون العملية الثنائية (×) تربط كل زوج مرتب (س ،ص) ∈ ط* × ط* بصفر واحد يسمى س × ص أو س . ص أو س ص ∈ ط*

ومثاله: (٢ ، ٣) ⟵(×) ٢ × ٣ = ٦ ∈ ط*

ولأن المجموعة ط* لا تحتوي الصفر بين عناصرها

لذا فإننا بحاجة الى مجموعة أخرى يكون الصفر من عناصرها مثل:

ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠} وتسمى المجموعة الكلية

فالصفر الذي ينتمي الى المجموعة ط يسمى عنصر محايد في النظام (ط ، +)

أي أن ٥ + صفر = صفر + ٥ = ٥

ومن هنا فإننا سن.؟؟.. سنقوم بإجراء عمليات الجمع والضرب على الأعداد الموجبة فقط مثل ٥ + ٧ = ١٢ ، لكل ٥ ، ٧ ، ١٢ ∋ ط

وكذلك ٥ × ٧ = ٣٥ ، لكل ٥ ، ٧ ، ٣٥ ∋ ط

وهكذا نشأت من العمليتين (+ ، ×) على الأعداد الطبيعية ط* والكلية ط

كما يلي:

جداول الجمع	جداول الضرب
٥ + ٠ = ٥	٥ × ٠ = ٠
٥ + ١ = ٦	٥ × ١ = ٥
٥ + ٢ = ٧	٥ × ٢ = ١٠
٥ + ٣ = ٨	٥ × ٣ = ١٥
٥ + ٤ = ٩	٥ × ٤ = ٢٠
٥ + ٥ = ١٠	٥ × ٥ = ٢٥

وهكذا..

(١ – ١٤) الزُمر Groups:

الزمرة نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة مثل (ج ، ٥)

حيث ج مجموعة غير خالية، ٥ عملية ثنائية.

وحتى تتشكل الزمرة (ج ، ٥) من النظام الرياضي المذكور يجب أن تتحقق في النظام الرياضي الشروط التالية معاً:

لكل أ ، ب ، جـ ∋ ج ، أ ٥ (ب ٥ جـ) = (أ ٥ ب) ٥ جـ الخاصية التجميعية

× للنظام (ج ، ٥) عنصر محايد هو ٠ هـ ٠٠حيث:

لكل هـ ∋ ج ⟵ هـ ٥ أ = أ ٥ هـ = أ ، لكل أ ∋ ج

× يوجد في النظام (ج ، ٥) نظير لكل عنصر مثل أ ،

أي لكل أ ∋ ج أ$^{-1}$ ∋ ج

حيث أ ٥ أ$^{-1}$ ٥ أ = هـ

فإذا ما تحققت الشروط الثلاثة السابقة فإن النظام (ح ، ٥) يسمى زمرة مثل:

النظام الرياضي (ص ، +) حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

٢ + (٣ + ‾٧) = (٢ + ٣) + (‾٧)

٢ + (‾٤) ٥ + (‾٧)

= - ٢ = - ٢

والصفر عنصر محايد للجمع حيث ٥ + صفر = صفر + ٥ = ٥

للصفر ٥ نظير جمعي هو - ٥ والعكس صواب

لأن ٥ + (- ٥) = (- ٥) + ٥ = صفر

وإذا كان أ ٥ ب = ب ٥ أ ،   لكل أ ، ب ∈ ج فإن:

الزمرة (ج ،٥) تسمى زمرة تبديلية أو آبلية Ableian Group نسبة الى الرياضي النرويجي آبل Abel (١٨٠٢ – ١٨٢٩)م مع ملاحظة أن (ص ، +) زمرة تبديلية حيث:

٧ + ٥ = ٥ + ٧ لأن الطرفين يساويان العدد الصحيح ١٢

وكذلك ٥⁻ + ٩ = ٩ + ٥⁻ لأن الطرفين يساويان العدد الصحيح ٤

ومن أشهر الزُمر على الاطلاق الزمر العددية التالية:

(ص ، +)   حيث ص الأعداد الصحيحة

(ك ، +) ، (ك* ، ×) حيث ك الأعداد النسبية و ك* الأعداد النسبية المغايرة للصفر

(ح ، +) ، (ح* ، ×)   حيث ح الأعداد الحقيقية، و ح* الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر.

(١- ١٥) الحلقات Rings:

الحلقة نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مثل (ج ، ٥ ، ×)

وحتى تتشكل الحلقة من النظام المذكور يجب أن تتحقق في النظام الشروط التالية:

× (ج ، ٥) زمرة تبديلية مثل (ص ، +) حيث ص الأعداد الصحيحة

× و (ج ، ×) نظام رياضي ذو عملية واحدة "تجميعي فقط

أي أ × (ب × جـ) = (أ × ب) × جـ مثل (ص× ، ٠)

× ثم تتوزع العملية ٥ على العملية × في النظام توزيعي:

أي أن أ ٥ = (ب × جـ) = (أ ٥ ب) × (أ ٥ جـ) لكل أ ، ب ، جـ ∋ ج

مثال:

٥ × (٦ + ٧) = (٥ × ٦) + (٥ × ٧)

= ٣٠ + ٣٥ = ٦٥

لذا فإن النظام (ص٠ + ، ×) حلقة وهي أشهر حلقة في الرياضيات وتسمى حلقة الأعداد الصحيحة Integers Ring وتكتب على الصورة (ص ٠ + ، ٠) حيث الضرب يرمز له أحياناً بالنقطة (٠) فالحلقة (ص ٠ + ، ٠) نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مكون من ثلاثي مرتب حيث:

مسقطه الأول المجموعة ص = {٠ ، ± ١، ± ٢، ± ٣ ، ٠٠٠}

ومسقطه الثاني عملية الجمع + العادية الثنائية والمعرفة كاقتران هكذا:

ص ، ص $\xrightarrow{+}$ ٢ ص

أي أن (٢ ، ٣) $\xrightarrow[\text{الجمع}]{+}$ ٢ + ٣ = ٥

ومسقطه الثالث عملية الضرب العادي (٠) الثنائية والمعرفة كاقتران هكذا:

ص ، ص ⟵ ص٢
الضرب

أي أن (٢ ، ٣) ⟵ ٢ × ٣ = ٦

هذا ومجموعة الأعداد الصحيحة تتألف من الأعداد السالبة والصفر والموجبة هكذا:

ص = صَ ∪ { ٠ } ∪ ص

والصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع في حلقة الأعداد الصحيحة.
والأعداد الصحيحة السالبة هي النظائر للأعداد الصحيحة الموجبة وبالعكس.

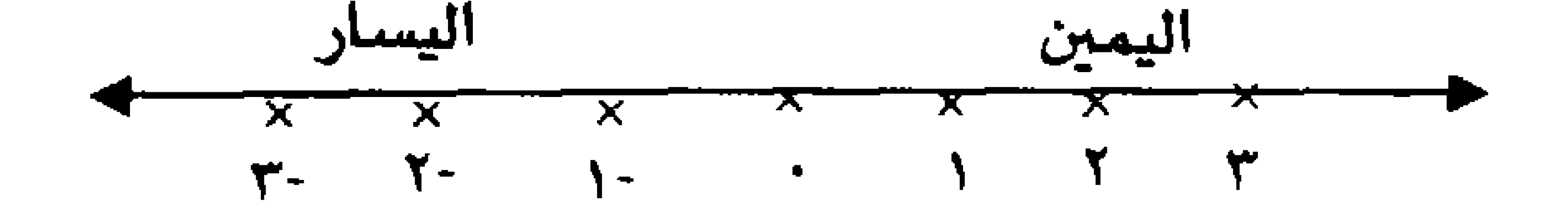
حيث العدد - ٥ نظير جمعي للعدد ٥ كون (- ٥) + ٥ = صفر المحايد

والعدد ٥ نظير جمعي للعدد (- ٥) كون ٥ + (- ٥) = صفر المحايد

مع ملاحظة أن العددين السالب والموجب يمثلان وضعين متعاكسين بالنسبة الى الصفر،

حيث العدد السالب يقع شماله على خط الأعداد

والعدد الموجب يقع على يمينه على نفس الخط كما في الشكل



وهناك مواقف عديدة تظهر وضعين متعاكسين في الحياة العملية مثل المكسب والخسارة في التجارة،

فإذا رمزنا للمكسب بالاشارة (+)

فرمز الخسارة اشارة (-) بالتأكيد.

وإذا رمزنا لدرجات الحرارة فوق الصفر بالاشارة (+)

فرمزها تحت الصفر الاشارة (-) بالتأكيد

هذا ونستطيع أن نمثل الأعداد الصحيحة بنقط منفصلة على خط الأعداد الذي لا بداية له (- ∞) ولا نهاية (∞) كما هو واضح على خط الأعداد، ومن الملاحظ أنه كلما اقترنا من الصفر فإن قيمة العدد الموجب تقل، وكلما ابتعدنا عن الصفر تزداد قيمة العدد الموجب. لذا فإن الصفر أصغر من العدد ١ والعدد ١ أصغر من العدد ٢ وهكذا.

وكلما اقترينا من الصفر تزداد قيمة العدد السالب، وكلما ابتعدنا عن الصفر تقل قيمته.

لذا فإن الصفر أكبر من –١ والعدد - ١ أكبر من - ٢ وهكذا..

ومن هنا نشأ ما يسمى بالقيمة المطلقة Absolute Value للأعداد ورمزها | أ | وتعرف:

| أ | بأنها عدد الوحدات التي تمثل بعد ذلك العدد أ عن الصفر وعلى خط الأعداد.

وكون بعد العدد - ٥ عن الصفر = ٥ وحدات مع ملاحظة أن - ٥ على يسار الصفر.

وكون بعد العدد ٥ عن الصفر = ٥ وحدات أيضاً مع ملاحظة أن ٥ على يمين الصفر.

فإن | - ٥| = | ٥ | = ٥

وللقيمة المطلقة | | خصائص عدة نوضح بعضها بالأمثلة فقط كما يلي:

(i) | س| = | - س |

فعندما س = ٥

فإن | ٥ | = | - ٥ | = ٥

وعندما س = - ٧

فإن | - ٧ | = | - (- ٧) | = | ٧ | = ٧

(ii) | س - ص | = | ص - س | لكل س ، ص أعداد صحيحة

عندما س = ٧ ، ص = ٥

فإن | ٧ - ٥ | = | ٥ - ٧ |

أي أن | ٢ | = | - ٢ | = ٢

"علماً بأنه يوجد خصائص أخرى توضح في مكانٍ آخر من المؤلف"

والآن سنناقش كيفية اجراء العمليات الرياضية المنوعة ضمن حلقة الأعداد الصحيحة (ص، + ، ·):

بعد أن اكتشف الانسان أن مجموعة الأعداد الكلية $ط = ط^{+} \cup \{٠\}$ عاجزة عن استيعاب الأعداد التي تصف بعض المواقف في الحياة العملية كخسارة التاجر لمبلغ ١٠٠ دينار مثلاً وقياس درجة حرارة ٧ تحت الصفر وعمق وادٍ مقداره ٢٠ متراً تحت سطح البحر وغيرها من المواقف، فكرّ بإيجاد مجموعة أخرى من الأعداد تضم أعداداً تصف تلك المواقف فكانت مجموعة الأعداد الصحيحة:

ص = {٠، ± ١، ± ٢، ± ٣ ، ...}

وكانت حلقة الأعداد الصحيحة (ص، + ، ·) التي أنتجت أعداداً صحيحة سالبة تصف مثل تلك المواقف،

فالخسارة نعبر عنها - ١٠٠ دينار

ودرجة الحرارة تحت الصفر نعبر عنها - ٧°س

وانخفاض الوادي تحت سطح البحر نعبر عنه - ٢٠ متراً وهكذا..

ولمناقشة العمليات في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، + ، ·) نبدأ:

"جمع الأعداد الصحيحة"

مثال:

أوجد ناتج جمع كلاً من:

٣ + ٥

- ٣ + ٥

(- ٣) + (- ٥)

٣ + (- ٥)

للتوصل الى الجواب الصواب سنسلك طرقاً ثلاث للجمع:

لإيجاد ناتج الجمع ذاك نبدأ باستخدام خط الأعداد Numbers Line

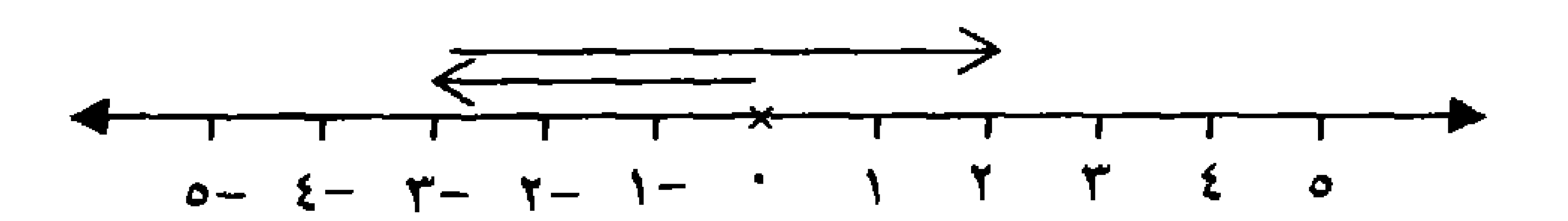
× (٣+٥)= ؟؟



ابدأ من الصفر وتحرك يميناً بمقدار ٣ وحدات لتصل الى العدد ٣ ثم تابع تحرك يميناً ايضاً بمقدار ٥ وحدات لتصل الى العدد ٨.

أي أن ٣ + ٥ = ٨

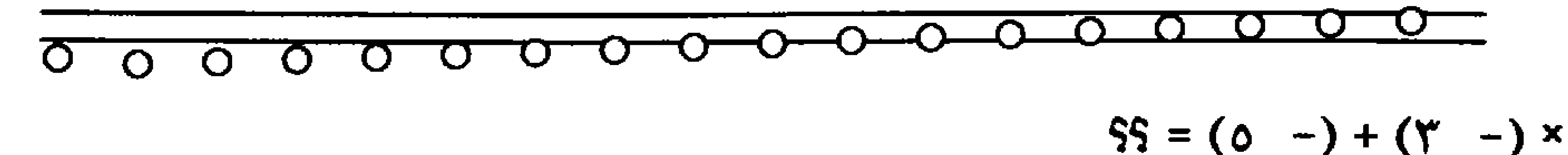
× (- ٣) + ٥ = ؟؟



ابدأ من الصفر وتحرك يساراً بمقدار ٣ وحدات لتصل الى العدد - ٣ ثم تحرك يميناً بمقدار ٥ وحدات لتصل الى العدد ٢

أي أن (- ٣) + ٥ = ٢

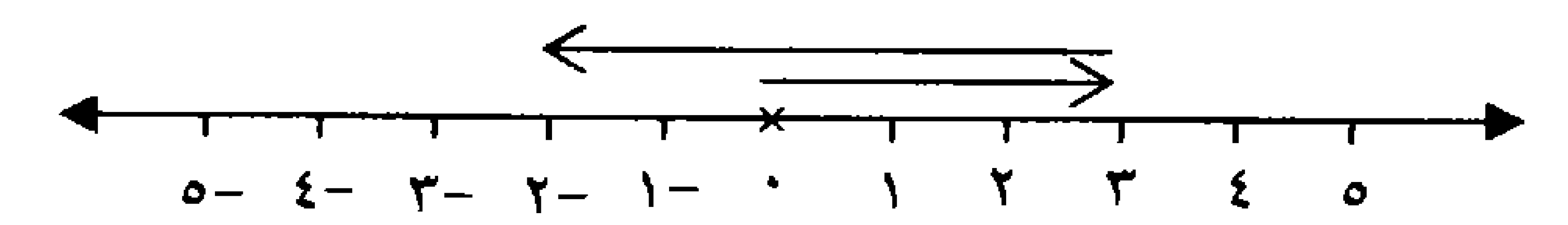
× (-٣) + (-٥) = ؟؟



ابدأ من الصفر وتحرك يساراً بمقدار ٣ وحدات لتصل الى العدد -٣ ثم تحرك يساراً أيضاً بمقدار ٥ وحدات لتصل الى العدد -٨

أي أن (-٣) + (-٥) = -٨

× ٣ + (-٥) = ؟؟



ابدأ من الصفر وتحرك يميناً بمقدار ٣ وحدات لتصل الى العدد ٣ ثم تحرك يساراً بمقدار ٥ وحدات لتصل الى العدد -٢

أي أن ٣ + (-٥) = -٢

وهناك طريقة أخرى لايجاد نواتج الجمع السابقة باستخدام وعاء الإشارات Sings container، يعتبر هذا الوعاء وسيلة تعليمية تفيد في اجراء عملية جمع الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة كما يلي:

×٣ + ٥ = ؟؟

+++++
+ + +

وعاء الاشارات

نستعيض عن الاعداد باشاراتها،

فالعدد ٣ مكون من ٣ اشارات موجبة

والعدد ٥ مكون من ٥ اشارات موجبة

وبعد (التعادل) أو التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة يبقى في الاناء ٨ اشارات موجبة.

أي أن ٣ + ٥ = ٨

× (- ٣) + ٥ = ؟؟

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة فيبقى في

الاناء ٢ اشارة موجبة

أي أن: (- ٣) + ٥ = ٢

وعاء الاشارات

× (- ٣) + (- ٥) = ؟؟

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة فيبقى في

الاناء ٨ اشارة سالبة

أي أن: (- ٣) + (- ٥) = - ٨

وعاء الاشارات

× ٣ + (- ٥) = ؟؟

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة يبقى في

الاناء اشارتين سالبتين

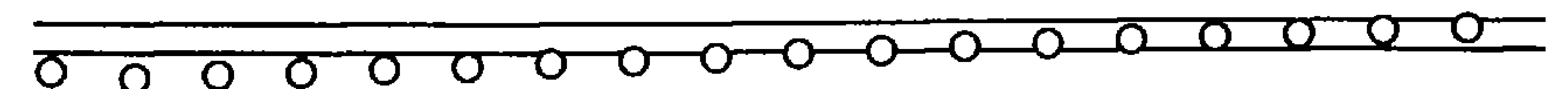
أي أن: ٣ + (- ٥) = - ٢

وعاء الاشارات

وهكذا....

والطريقتان المذكورتان أعلاه لجمع الأعداد الصحيحة تستخدمان عندما تكون قيم الأعداد المراد جمعها الموجبة أقل من ١٠ مثلاً ليكون عدد الاشارات قليلاً والسالبة أكبر من - ١٠ مثلاً ليكون عدد الاشارات قليلاً أيضاً.

أما اذا زادت قيم الاعداد الموجبة عن ١٠ أو قلت قيم الأعداد السالبة عن - ١٠ فإننا نتبع الطريقة التالية والمكونة من شقين:



الشق الأول: لجمع عددين صحيحين متشابهين بالاشارة جد المجموع للقيمتين المطلقتين لهما واعط الناتج نفس الاشارة كما يلي:

(- ٢) + (- ٤٠) = - ٦٠

٢٠ + ٤٠ = ٦٠

الشق الثاني: لجمع عددين صحيحين مختلفين بالإشارة جد الفرق بين القيمتين المطلقتين لهما وأعط الناتج اشارة العدد الذي قيمته المطلقة أكبر كما يلي:

(- ٢٠) + (٥٠) = ٣٠

(٢٠) + (- ٥٠) = - ٣٠

أمثلة محلولة

أوجد ناتج:

١٣ + (- ٨) = ٥ ، ٨ + (- ١٣) = - ٥ ، (- ١٤) + (- ٢٥) = - ٣٩

(- ٢) + (- ٦) = - ٨ ، ٣٥٠ + (- ١٦١) = ١٨٩ ، صفر + ١٥ = ١٥

|- ٩٩ + ١٣٢| = |٣٣| = ٣٣ ، |- ٩٩- ١٣٢| = |- ٢٣١| = ٢٣١

- ١١ + ٢٤ + (- ٧) = (- ١١ + ٢٤) + (- ٧) = ١٣ + (- ٧) = ٦

طرح الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة:

تعتبر عملية الطرح في الرياضيات (-) عملية عكسية لعملية الجمع (+) والعكس صواب.

عملية الطرح في حلقة الأعداد الصحيحة ولأي عددين صحيحين أ ، ب تكون على الصورة أ – ب = أ + النظير الجمعي (المعكوس) للعدد ب

= أ + (- ب)

وتصبح عملية جمع بعد تغيير اشارة العدد الثاني.

وعليه ١٣- ٩ =١٣+ (- ٩) = ٤ بأي من الطرق الثلاث السابقة للجمع

وكذلك - ١٥ – (- ٨) = - ١٥+٨ = - ٧ بأي من الطرق الثلاث السابقة للجمع.

ثم كذلك - ٨ - ٨ = - ٨+(- ٨)= - ١٦ بأي من الطرق الثلاث السابقة للجمع.

مثال:

اذا كانت أعلى درجة حرارة مسجلة في مدينة عجلون ٣٦ س° في يوم من صيف أحد الأعوام، وأدنى درجة حرارة مسجلة في يوم من شتاء نفس العام - ٥س° أوجد الفرق بين أعلى وأدنى درجتي حرارة عجلون في ذلك العام.

الفرق = أعلى درجة حرارة – أدنى درجة حرارة

= ٣٦ – (- ٥)

= ٣٦ + ٥ = ٤١ س° ويسمى هذا الفرق المدى الحراري لذلك العام.

كما يسمى العدد الأول (+٣٦) المطروح منه والعدد - ٥ المطروح والعدد ٤١ باقي الطرح.

ومن الأمثلة:

٦- ١٠ = ٦ + (- ١٠) = - ٤ ، ٩- (- ١٣) = ٩ + ١٣ = ٢٢

وهكذا..

ضرب الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +،٠) Integer Ring

إذا علمت أن درجة الحرارة تنخفض بمعدل ٧ درجات سيلسيوسية كلما ارتفعنا في الغلاف الجوي حول الأرض بمعدل ١ كم تقريباً ومن نقطة في الغلاف الجوي درجة الحرارة فيها صفر سيلسيوس ارتفع مسافة ٣ كم، فما درجة الحرارة عند النقطة التي وصلها؟ بما أن درجة الحرارة تنخفض ٧ درجات سيلسيوسية لكل كيلومتر واحد فإن درجة الحرارة تصبح:

(- ٧) + (- ٧) + (- ٧) = مكررة بالجمع ثلاث مرات

وبما أن الضرب هو جمع مكرر فإن:

(- ٧) + (- ٧) + (- ٧) = (- ٧) (٣) = - ٢١

وكان حاصل ضرب عدد مختلفين بالاشارة هو عدد سالب

والآن اليك جدول الاشارات في الضرب دون جدالٍ أو نقاش:

(+١) (+١) = +١
(- ١) (- ١) = +١
عند ضرب عددين متشابهين بالاشارة فاشارة الجواب (+)

(+١) (- ١) =(- ١)
(- ١) (+١) = - ١
عند ضرب عددين مختلفين بالاشارة فاشارة الجواب (-)

مثال:

(٥) (٦) = ٣٠

(- ٥) (- ٦) = ٣٠

(- ٥) (٦) = - ٣٠

(٥) (- ٦) = - ٣٠

هذا ويسمى العدد الأول ٥ المضروب والعدد الثاني (- ٦) المضروب فيه والعدد (- ٣٠) حاصل الضرب.

أمثلة محلولة:

أوجد حاصل ضرب:

(١١) (- ٤) = - ٤٤ ، (- ٦٢) (- ٥) = ٣١٠ ، (- ٥- ٨) (٦) =(- ١٣)(٦)

= - ٧٨

قسمة الأعداد الصحيحة في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، + ،٠):

عندما يكون ذلك ممكناً:

تعتبر عملية القسمة (÷) في الرياضيات عملية عكسية لعملية الضرب (×) والعكس صواب.

وأما من حيث قوانين الاشارات فالعمليتان متطابقتان تماماً أي أن ناتج قسمة عددين صحيحين متشابهين بالاشارة يكون موجباً:

(+١) ÷ (+١) = +١

(- ١) ÷ (- ١) = +١

مثل: ١٢ ÷ ٦ = ٢ ، (- ١٢) ÷ (- ٦) =٢

وناتج قسمة عددين صحيحين مختلفين بالاشارة يكون سالب:

(+١) ÷ (- ١) = - ١

(- ١) ÷ (+١) = - ١

مثل: ١٢ ÷ (- ٦) = - ٢ ، (- ١٢) ÷ ٦ = - ٢

والقسمة في حلقة الأعداد الصحيحة غير جائزة إلا اذا كان خارج القسمة عدداً صحيحاً.

مثل: ٢٠÷٥ = ٤ لكن ٢٠ ÷ ٧ غير جائزة في الحلقة (ص، + ، ٠)

مثال:

٤٢÷٦= ٧ ، (- ٤٢) ÷ (٦) = - ٧ ، (- ٤٢) ÷ (- ٦) =٧

٤٢ ÷ (- ٦) = - ٧

هذا ويسمى العدد الأول (٤٢) المقسوم والثاني (- ٦) المقسوم عليه والعدد - ٧ خارج القسمة.

هناك بعض المفاهيم نود مناقشتها في حلقة الأعداد الصحيحة بالرموز والأمثلة فقط:

× **العامل** Divisor **أو القاسم:**

يكون العدد الصحيح ب عاملاً أو قاسماً للعدد الصحيح أ اذا وفقط اذا كان:

أ = ب × ك حيث ك ∋ ص

وعندها يقال أن العدد أ من مضاعفات العدد ب

مثال:

العدد الصحيح ٣ عامل للعدد الصحيح ٢٤ لأن ٢٤ = العدد ٣ × ٨ عندها يكون العدد ٢٤ من مضاعفات العدد ٣ وهكذا..

ومن هنا ينتج أن عوامل العدد أ ≠ صفر أو قواسمه في حلقة الأعداد الصحيحة كما يلي:

قواسم العدد أ أو عوامله هي ، أ، - أ، ١، - ١ على الأقل

مثال:

عوامل العدد ٥ هي: ٥، - ٥، ١،- ١ فقط

وعوامل العدد ٨ هي: - ٨ ، ٨،- ١ ،١، ٢، ٤، - ٤ وهكذا

× **العدد الأولي Prime Number:**

يسمى العدد الصحيح جـ عدداً أولياً اذا وفقط اذا كان للعدد جـ أربعة عوامل فقط هي جـ ، - جـ ، ١، - ١

فالعدد ٧ عدد أولي كون عوامله ٧، - ٧ ، ١، - ١

والعدد ٩ ليس أولياً كون عوامله أكثر من أربعة ٩، - ٩، ١، - ١ ، ٣، - ٣

ولتبسيط المفهوم: العدد الأولي هو العدد الذي ليس له عوامل إلا نفسه والواحد الصحيح فقط دون اعتبار الاشارة.

وكما يقال: العدد الأولي لا يقبل القسمة إلا على نفسه (القسمة بدون باقٍ)

والأعداد الأولية مجموعة غير منتهية تسمى أ.

حيث أ = {± ٢، ± ٣، ± ٥، ± ٧ ، ...}

ويمكن أن نكتفي الآن بالاعداد الأولية الموجبة فقط للسهولة فقط،

وهي أ= {٢ ، ٣ ، ٥، ... ،٧}

ويلاحظ أن جميع عناصر هذه المجموعة (جميع الأعداد) اعداد صحيحة فردية ما عدا العدد ٢ فهو كما يعلم الجميع عدد صحيحاً زوجياً، وبما أن العدد ٢ عامل من عوامل العدد ١٠ كون عوامل العدد ١٠ وهي:

١٠، - ١٠ ، ٥- ٥ ، ٢، - ٢ ، ١، -١

فإن العدد ٢ أصغر من أو يساوي العدد ١٠

وكذلك - ٢ أصغر من أو يساوي العدد ١٠

وهكذا لبقية العوامل

وبشكل عام، اذا كان العدد ب من عوامل العدد د فإن:

ب أصغر من أو يساوي د

وبالرموز ب ≥ د

مع ملاحظة أن العدد ١ ليس أولياً كون عدد عوامله ليست أربعة كما مرّ سابقاً. بل اثنين فقط هما - ١ ، ١

× **تحليل الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +،٠) الى عواملها الأولية وكتابة الناتج بصورة أسية:**

مع أننا سنركز على تحليل الأعداد الصحيحة الموجبة لا لينها وسهولتها فإننا لن نفعل تحليل الأعداد الصحيحة السالبة في المستقبل.

نبدأ بالعدد ١٦ فنقول:

١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

أي أن ١٦ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢

= $٢^{٤}$ ← ٤ يسمى الأس، ٢ يسمى الأساس

مثال:

حل العدد ٨١ الى عوامله وضع الجواب بصورة أسية:

٨١	٣
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٨١ = ٣ × ٣ × ٣ × ٣

= $٣^{٤}$

مثال:

حل العدد ٥٤ الى عوامله الأولية:

٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٥٤ = ٢ × ٣ × ٣ × ٣

= $٢^{١}$ × $٣^{٣}$

والمختصر المفيد لعملية التحليل المبسطة هذه هو الاستمرار بعملية التحليل حتى نحصل على العدد "١" في نهاية عملية القسمة كما في الأمثلة السابقة أعلاه.

مثال:

اكتب ما يلي على شكل قوى أو أسس:

$٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٥^{٤}$

$٧ \times ٧ \times ٧ \times ٣ \times ٣ = ٧^{٣} \times ٣^{٢}$

$(-٧)(-٧)(-٧)(-٧) = (-٧)^{٤}$

مثال:

اكتب ما يلي على شكل حاصل ضرب:

$٣^{٤} \times ٣^{٢} = (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) \times (٣ \times ٣) = ٣^{٦} = ٧٢٩$

$٥^{٢} \times ٣^{٣} = (٥ \times ٥)(٣ \times ٣ \times ٣) = (٢٥)(٢٧) = ٦٧٥$ وهكذا.

وبشكل عام يمكن أن يقال أن:

$\text{س}^{\text{ن}} = \text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \cdots \times \text{س}$ الى ن مرة وتسمى الصورة الأسية للأساس س حيث س يسمى الأساس ، ن يسمى الأس.

لذا فإن $\text{س}^{٣} = \text{س} \times \text{س} \times \text{س}$ وهكذا

وكذلك $\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٣} = (\text{س} \times \text{س})\ ٣\ (\text{س} \times \text{س} \times \text{س}) = \text{س}^{٥}$ (عند الضرب تجمع الأسس)

وكذلك $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٣}} = \frac{\text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{س}}{\text{س} \times \text{س} \times \text{س}} = \text{س} = \text{س}^{٤-٣} = \text{س}$ (عند القسمة تطرح الأسس)

ثم كذلك $(\text{س}^{٢})^{٣} = (\text{س} \times \text{س})(\text{س} \times \text{س})(\text{س} \times \text{س}) = \text{س}^{٦} = \text{س}^{٢ \times ٣} = \text{س}^{٦}$ (عند الرفع تضرب الأسس)

وبناءً عليه:

$$٢^{٣} \times ٢^{٤} = ٢^{٣+٤} = ٢^{٧}$$

وكذلك $٢^{٥} \div ٢^{٢} = ٢^{٥-٢} = ٢^{٣}$

وكذلك $(٢^{٣})^{٦} = ٢^{٣\times٦} = ٢^{١٨}$

نستطيع الآن اجراء عملية التحليل الى العوامل لأعداد صحيحة سالبة أيضاً.

مثال:

حلل - ٦٤ الى عواملها الأولية كعوامل سالبة

المهم أن ينتج العدد "١" كميةً واشارةً

في نهاية عملية التحليل

لذا فان:

$$-٦٤ = (-٢)^{٦}(-١)$$

-٦٤	-٢
٣٢	-٢
-١٦	-٢
٨	-٢
-٤	-٢
٢	-٢
-١	-١
١	

مثال:

وكذلك حلل- ٢٧ الى عوامله الأولية السالبة

$$-٢٧ = (-٣)^{٣}$$

-٢٧	-٣
٩	-٣
-٣	-٣
١	

وهكذا...

× **القاسم المشترك الأكبر** (Highest Common Factor (H.C.F):

سنجد القاسم للأعداد الصحيحة الموجبة فقط.

واختصاراً يكتب هكذا: ق . م . أ

لايجاد سنسير بطريقتين:

الأولى: طريقة القواسم أو العوامل.

لإيجاد ق . م . أ للعددين ٢٠ ، ٣٠

نجد قواسم العدد ٢٠ الموجبة وهي ١ ، ٢، ٤ ، ٥ ، ١٠

وقواسم العدد ٣٠ الموجبة وهي ١ ، ٢، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠

ونأخذ أكبر هذه القواسم كونه القاسم المشترك (الأكبر)

وأكبرها هو العدد ١٠

∴ ق . م . أ = ١٠

هذه الطريقة مطولة لذا نلجأ الى الطريقة الثانية المختصرة:

الطريقة الثانية:

لإيجاد ق . م . أ لعددين أو أكثر نحلل كلاً منها الى عوامله الأولية هكذا:

٢٠ = ٢ × ٢ × ٥

٣٠ = ٢ × ٥ × ٣

٢٠	٢
١٠	٢
٥	٥
١	

٣٠	٢
١٥	٣
٥	٥
١	

نأخذ العوامل المشتركة وتضرب في بعضها كما يلي:

ق . م . أ = ٢ × ٥ = ١٠

مثال:

أوجد ق م . ا للعددين ٣٠ ، ٩٠

يمكن تحليل العددين معاً هكذا

٣٠	٩٠	٢
١٥	٤٥	٣
٥	١٥	٥
١	٣	

نتوقف حيث التحليل للعددين معاً.

ق . م . أ = ٢ × ٣ × ٥ = ٣٠

مثال:

أوجد ق . م . أ للعددين ١٥ ، ٣٤

١٥	٣٤	١
١٥	٣٤	

ق . م . أ = ١ فقط

حيث لا يوجد عوامل أخرى مشتركة.

مثال:

أوجد ق . م . أ لكل من مجموعات الأعداد التالية:

(i) $٢^{٣}$ ، ٢ × ٣

الحل:

$٢^{٣}$ = ٢ × ٢ × ٢

٢ + ٣ = ٢ × ٣

ق . م . أ = ٢

(ii) ٢٤ ، ٨٤)

٢٤	٨٤	٢
١٢	٤٢	٢
٦	٢١	٣
٢	٧	
نتوقف		

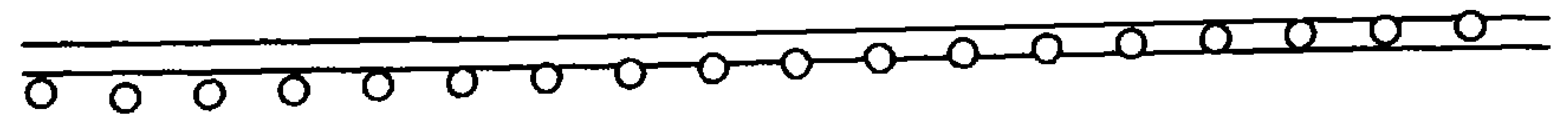
ق . م . أ = ٢٠ × ٢ × ٣ = ١٢

(iii) ٣٥ ، ٤٥ ، ٦٣)

٣٥	٤٥	٦٣	١
٣٥	٤٥	٦٣	

ق . م . أ = ١

حيث لا يوجد عوامل مشتركة أخرى.



× المضاعف المشترك الأصغر Lowest Common multiple:

للأعداد الصحيحة الموجبة فقط: ويرمز له بالرمز م . م . أ

والطريقة باختصار شديد: نحلل الأعداد ونرتب عواملها ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة ونضربها في بعضها البعض هكذا:

مثال:

أوجد م . م . أ للأعداد ٢٤ ، ٣٦

٢٤ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣

٣٦ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣

م . م . أ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣

= ٨ × ٩ = ٧٢

٢٤	٢
١٢	٢
٦	٢
٣	٣
١	

٣٦	٢
١٨	٢
٩	٣
٣	٣
١	

مثال:

أوجد م . م . أ للعددين ٢٨ ، ٤٩

نحلل العددين معاً هكذا:

٢٨	٤٩	٧
٤	٧	

ثم نضرب العوامل المشتركة على اليسار في خوارج القسمة

م . م . أ = ٧ × ٧ × ٤

= ١٩٦ حاصل ضرب العوامل المشتركة × غير المشتركة

مثال:

أوجد ق . م . أ للعددين ٤٨ ، ٣٦

نحلل ونضع الجواب بصورة أسية لكل من العددين:

٤٨ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = $٢^{٤} × ٣^{١}$ بصورة أسية

٣٦ = ٢ × ٢ × ٣ × ٣ = $٢^{٢} × ٣^{٢}$ بصورة أسية

والآن يمكن أن نجد:

م . م . أ = حاصل ضرب العوامل جميعها بأكبر أس:

هكذا:

م . م . أ = $٢^{٤} × ٣^{٢}$ = (١٦) (٩) = ١٤٤

ويمكن أن نجد ق . م . أ "حاصل ضرب العوامل المشتركة بأصغر أس":

هكذا:

ق . م . أ = $٢^{٢} × ٣^{١}$ = (٤) (٣) = ١٢

مثال:

أجر العمليات التالية:

(- ٨) + (٤)

(- ٨) − (٤)

(- ٨) (٤)

$\frac{(-٨)}{٤}$

الحل:

(- ٨) + (٤) = - ٤   (٤٤٤٤----)

(- ٨) + (- ٤) = - ١٢   (٤٤٤٤----)

(- ٨) (٤) = - ٣٢

$\frac{(-٨)}{٤}$ = - ٢

(١- ١٦) الحقول Field:

الحقل نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مثل (ج ، ه ، *)، وحتى يتشكل الحقل من هذا النظام الرياضي يجب أن يتحقق في النظام المذكور الشروط التالية معاً:

(i) (ح ، ه) زمرة تبديلية

(ii) (ج* ، *) زمرة تبديلية

(iii) ثم تتوزع العملية * على العملية ه هكذا:

أ * (ب ه جـ) = (أ * ب) ه (أ * جـ) لكل أ ، ب ، جـ ∋ ج

ومن أشهر الحقول في الرياضيات:

حقل الأعداد النسبية (ك، + ، ٠) حيث ك مجموعة الأعداد النسبية

وحقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ٠) حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية

ثم حقل الأعداد المركبة (ع، + ، ٠) حيث ع مجموعة الأعداد المركبة

والعدد المركب أ + ب ت حيث أ ، ب ∋ ح حيث ت^{٢} = - ١

٠ سيناقش فيما بعد"

× **حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠) Rational Field:**

وحقل الأعداد النسبية (ك، + ، ٠) ثلاثي مرتب،

مسقطه الأول مجموعة الأعداد النسبية ك = {$\frac{أ}{ب}$ ، أ ∋ ص ، ب ∋ ص*}

ومسقطه الثاني عملية الجمع العادية (+)

ومسقطه الثالث عملية الضرب العادية (٠)

والعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ ليس هو الزوج المرتب (أ ، ب) فقط كما أنه ليس خارج قسمة

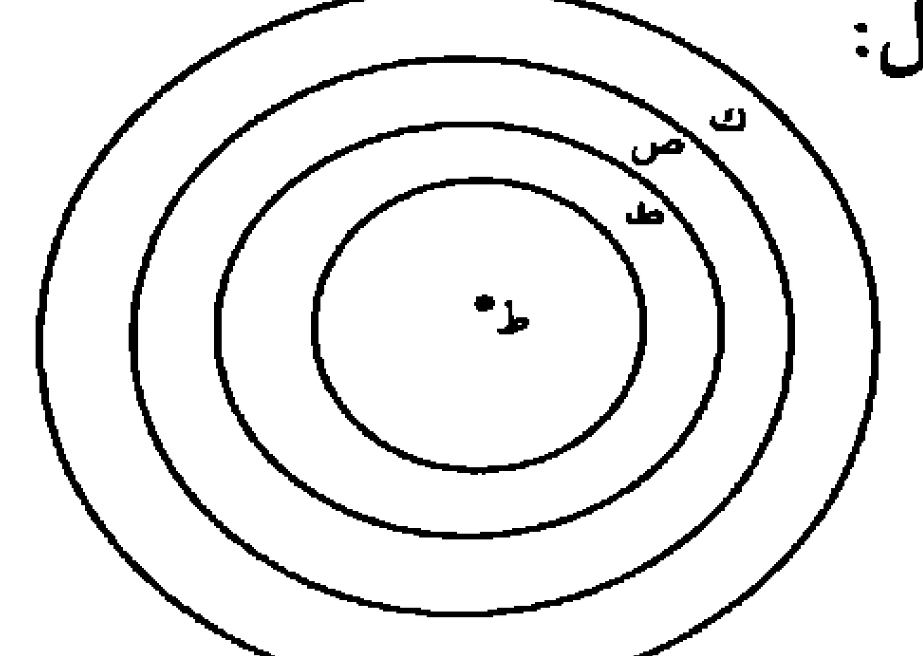
العدد الصحيح أ على العدد الصحيح ب فقط أي ليس هو الكسر العادي Fraction، وانما هو صف من صفوف التكافؤ التي يمثلها العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ بأبسط صورة ممكنة، لذا يرتبط العدد النسبي بالكسر العادي ومضاعفاته حيث:

$$\frac{١}{٢} = \frac{١ \times ٢}{٢ \times ٢} = \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٣} = \frac{١ \times (-٤)}{٢ \times (-٤)} = \frac{١ \times (-٥)}{٢ \times (-٥)} = \cdots$$

أي $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{-٥}{-١٠}$ وهكذا

والجدير بالذكر أن كل عدد طبيعي أو كلي أو صحيح هو عدد نسبي والعكس ليس صواباً كما هو موضح في الشكل:

كون ط* ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ك



أي أن العدد الطبيعي ٤ = $\frac{٤}{١}$ أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الطبيعية ط*

والعدد الكلي صفر = $\frac{صفر}{١}$ أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الكلية ط

والعدد الصحيح (- ٥) = $\frac{-٥}{١}$ أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الصحيحة ص

ومجموعة الأعداد النسبية ك = كَ ∪ {٠} ∪ ك⁺ مع ملاحظة أن يكون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ موجباً عندما تكون للعددين الصحيحين أ ، ب الاشارة نفسها مثل: $\frac{+٥}{+٩}$ أو $\frac{-٤}{-٥}$ حيث (+٥) (+٩) > صفر وكذلك (- ٤) (- ٥) > صفر

ويكون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ سالباً عندما تكون للعددين الصحيحين أ ، ب اشارتان مختلفتان مثل $\frac{+٥}{-٩}$ أو $\frac{٤}{-٥}$ حيث (+٥) (- ٩) < صفر وكذلك (٤) (- ٥) < صفر.

ثم يكون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ = صفر عندما يكون أ = صفر دون ب

أي أن: ب ≠ صفر دائماً وان أ = صفر فقط

مثال:

$\frac{٠}{٥} = \frac{٠}{-٣}$ كون (صفر) (٥) = (صفر) (- ٣) = صفر

وبناء على ما سبق فإن:

العدد النسبي $\frac{-٢}{٥}$ سالباً

والعدد النسبي $\frac{٢}{-٥}$ سالباً

وبفضل كتابته على الشكل - $\frac{٢}{٥}$

وعليه: $\frac{-٢}{٥} = \frac{٢}{-٥} = - \frac{٢}{٥}$

والعدد النسبي $\frac{٣}{٥}$ موجب والعدد $\frac{-٣}{-٥}$ موجب

لذا $\frac{٣}{٥} = \frac{-٣}{-٥}$ كون (٣) (٥) = (- ٣) (- ٥) كما أسلفنا.

× تبسيط العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ ، أي ظهور $\frac{أ}{ب}$ بأبسط صورة ممكنة

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} \longrightarrow$ فإن (أ) (د) = (ب) (جـ)

كون $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ينتميان الى نفس صف التكافؤ الذي يمثله $\frac{أ}{ب}$ بأبسط صورة

أي أن $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠}$ لأن (١) (١٠) = (٢) (٥)

ومن هنا لتبسيط العدد النسبي $\frac{٥}{١٠}$ نقسم العدد ٥ (يسمى أحياناً بسط الكسر العادي)

والعدد ١٠ (يسمى أحياناً مقام الكسر العادي) على ق. م. أ للعددين ٥ ، ١٠ وهو العدد "٥"

هكذا: $\frac{٥}{١٠} = \frac{٥ \div ٥}{١٠ \div ٥} = \frac{١}{٢}$

والعملية تتم بإيجاز شديد هكذا:

$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1}{2}$ وكذلك $\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4}$

وكذلك $\frac{\cancel{-2}^{-1}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ كونه عدداً سالباً.

ومن هنا وبشكل عام فإن $\frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب} = -\frac{أ}{ب}$ والصورة الأخيرة

$-\frac{أ}{ب}$ هي الأفضل وأبسط صورة للعدد النسبي $\frac{-48}{-60} = \frac{\cancel{48}^{4}}{\cancel{60}_{5}} = \frac{4}{5}$ كونه عدداً موجباً.

هذا ولكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب $\neq$ صفر يوجد عدد نسبي آخر هو $\frac{ب}{أ}$ يسمى مقلوب العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ أو نظيره الضربي. كون $\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = 1$ الواحد الصحيح العنصر المحايد لعملية الضرب (٠)

فمقلوب العدد $\frac{7}{3}$ هو $\frac{3}{7}$ ومقلوب العدد $\frac{-7}{3}$ هو $\frac{-3}{7}$

ومقلوب العدد ٥ هو $\frac{1}{5}$ ومقلوب العدد $\frac{1}{8}$ هو ٨ وهكذا

مثال:

اكتب كلاً من الأعداد التالية على الصورة $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب $\neq$ صفر هو واكتب مقلوبة ايضاً.

مثال:

العدد $7\frac{1}{2} = \frac{(2 \times 7) + 1}{2} = \frac{14 + 1}{2} = \frac{15}{2}$ ومقلوبه $\frac{2}{15}$

العدد $-1.4 = \frac{-14}{10} = \frac{-7}{5}$ ومقلوبه $\frac{5}{-7}$

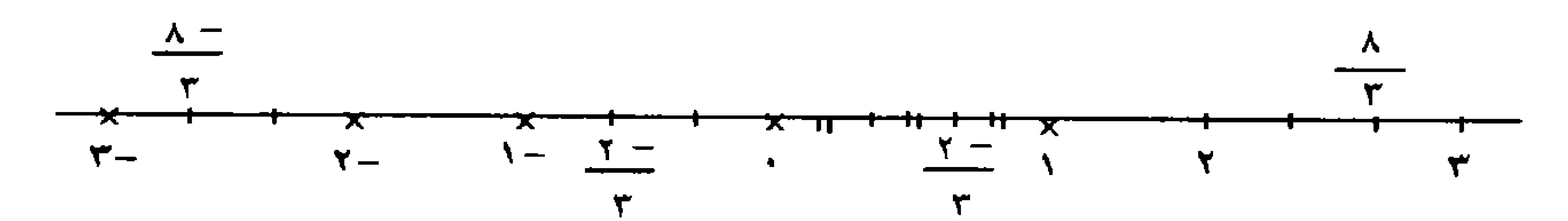
العدد $0.044 = \frac{44}{1000} = \frac{11}{250}$ ومقلوبه $\frac{250}{11}$

وكما تم تمثيل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد يمكن تمثيل الأعداد النسبية على نفس الخط يجعل الأعداد النسبية الموجبة على يمين الصفر والأعداد النسبية السالبة على يساره

مثال:

مثّل الأعداد النسبية التالية $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{-٨}{٣}$ على خط الأعداد

لتمثل العدد $\frac{٢}{٣}$ على خط الاعداد نقول ٢ < ٣ أي أن $\frac{٢}{٣}$ < ١ لذلك فإن $\frac{٢}{٣}$ يقع بين ٠ ، ١ عندها تقسم المسافة من صفر الى ١ الى ٣ أقسام ونافذ منها قسمين وتعين العدد $\frac{٢}{٣}$ هكذا:



ولتمثيل العدد - $\frac{٢}{٣}$ فالعدد ٢ < ٣ وكون العدد - $\frac{٢}{٣}$ سالب فإنه أكبر من - ١ ويقع بين العددين - ١ ، صفر وتقسم المسافة من - ١ الى صفر الى ثلاثة أقسام ونأخذ قسمين ونعين العدد - $\frac{٢}{٣}$ هكذا

أما لتمثيل العدد $\frac{٨}{٣}$ فإننا نحوله الى عدد كسري أي عدد صحيح وكسر حقيقي (بسطه أصغر من مقامه) بقسمة ٨ ÷ ٣ = ٢ $\frac{٢}{٣}$ فالعدد يقع بين ٢ ، ٣ وبنفس الطريقة السابقة.

وكذلك $\frac{-٨}{٣}$ = - ٢ $\frac{٢}{٣}$ فالعدد يقع بين - ٣ ، - ٢ وبنفس الطريقة السابقة

هذا ويسمى بعد العدد عن الصفر بالقيمة المطلقة للعدد (كما مرّ سابقاً في حلقة الأعداد الصحيحة).

لذلك فإن $\left|\frac{٢}{٣}\right| = \left|-\frac{٢}{٣}\right| = \frac{٢}{٣}$

وكذلك $\left|\frac{٨}{٣}\right| = \left|-\frac{٨}{٣}\right| = \frac{٨}{٣}$

لذلك يسمى العدد $-\frac{٢}{٣}$ معكوس جمعي للعدد $\frac{٢}{٣}$ والعكس صواب

وكذلك يسمى العدد $-\frac{٨}{٣}$ معكوس جمعي للعدد $\frac{٨}{٣}$ والعكس صواب

والواضح من التمثيل على خط الاعداد أن العدد الواقع على اليمين أكبر من العدد الواقع على اليسار كما في تمثيل الأعداد السابقة.

أي أن $-\frac{٢}{٣}$ أصغر من $\frac{٢}{٣}$

وبالرموز $-\frac{٢}{٣} > \frac{٢}{٣}$ (أصغر من) $\xleftarrow{\text{والعكس}}$ $\frac{٢}{٣} < -\frac{٢}{٣}$ (أكبر من)

وكذلك $-\frac{٨}{٣} > \frac{٨}{٣}$ $\xleftarrow{\text{والعكس}}$ $\frac{٨}{٣} < -\frac{٨}{٣}$

ولذلك فعند مقارنة الأعداد النسبية فإننا نوحد مقاماتها ونقارن بين بسوطها باعتبار الأعداد النسبية كسور عادية.

وللمقارنة بين العددين $\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٢}{٣}$ نقول

$\frac{٥}{٨}\frac{\times ٣}{\times ٣}$ ، $\frac{٢}{٣}\frac{\times ٨}{\times ٨}$ (نوحد المقامات كون الأعداد النسبية ككسور عادية)

$\frac{١٥}{٢٤}$ ، $\frac{١٦}{٢٤}$

كون $١٥ > ١٦$ $\xleftarrow{\text{فإن}}$ $\frac{٥}{٨} < \frac{٢}{٣}$

وكذلك $-\frac{٥}{٨}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ نقول

$-\frac{٥}{٨}\frac{\times ٣}{\times ٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}\frac{\times ٨}{\times ٨}$

$\frac{-١٥}{٢٤}$ ، $\frac{-١٦}{٢٤}$

كون $-١٥ < -١٦$ $\xleftarrow{\text{فإن}}$ $\frac{-١٥}{٢٤} < \frac{-١٦}{٢٤}$

من هنا ينشأ الترتيب التنازلي والتصاعدي للأعداد النسبية.

مثال:

رتب الأعداد النسبية التالية $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٦}{١٠}$ ، $\frac{٨}{١٥}$ ترتيبا تصاعدياً ثم ترتيباً تنازلياً.

نبدأ بتوحيد المقامات حيث المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ٩ ، ١٠ ، ١٥ هو ٩٠ هكذا:

$$\frac{٥}{٩} \times \frac{١٠}{١٠} ، \frac{٦ \times ٩}{١٠ \times ٩} ، \frac{٨ \times ٦}{١٥ \times ٦}$$

$$= \frac{٥٠}{٩٠} ، \frac{٥٤}{٩٠} ، \frac{٤٨}{٩٠}$$

والترتيب التصاعدي لها هو $\frac{٤٨}{٩٠}$ ، $\frac{٥٠}{٩٠}$ ، $\frac{٥٤}{٩٠}$

أي $\frac{٨}{١٥}$ ، $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٦}{١٠}$

وأما الترتيب التنازلي بعد اجراء العمليات السابقة فهو:

$\frac{٦}{١٠}$ ، $\frac{٥}{٩}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

مثال:

رتب الأعداد التالية $\frac{٨}{٧}$ ، $\frac{-٢}{٧}$ ، $\frac{-٩}{٧}$ ، $\frac{\text{صفر}}{١}$ ، $\frac{-١}{١}$ تنازلياً

نبدأ بتوحيد المقامات حيث المضاعف المشترك الأصغر للمقامات هو ٧

أي $\frac{٨}{٧}$ ، $\frac{-٢}{٧}$ ، $\frac{-٩}{٧}$ ، $\frac{\text{صفر}}{٧}$ ، $\frac{-٧}{٧}$

والترتيب التنازلي: $\frac{٨}{٧}$ ، $\frac{\text{صفر}}{٧}$ ، $\frac{-٢}{٧}$ ، $\frac{-٧}{٧}$ ، $\frac{-٩}{٧}$ ،

أي $\frac{٨}{٧}$ ، صفر ، $\frac{-٢}{٧}$ ، - ١ ، $\frac{-٩}{٧}$

مثال محلول:

ضع واحدة من الاشارات (> ، < ، =) بين كل عددين فيما يلي:

× { $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ } بما أن ٣ < ٤ فإن $\frac{٣}{٥} < \frac{٤}{٥}$

× { $-\frac{١}{٢}$ ، - ١ } بعد توحيد المقامات، $-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٢}$

بما أن - ١ > - ٢

فإن $-\frac{١}{٢} > -\frac{٢}{٢} \leftarrow -\frac{١}{٢} > -١$

× $\{\frac{٨}{٥} ، \frac{٨}{٣}\}$ بعد توحيد المقامات $\frac{٨}{٥} \times \frac{٣}{٣} ، \frac{٨}{٣} \times \frac{٥}{٥} \longleftarrow \frac{٢٤}{١٥} ، \frac{٤٠}{١٥}$

بما أن $٢٤ < ٤٠$

فإن $\frac{٢٤}{١٥} < \frac{٤٠}{١٥} \longleftarrow \frac{٨}{٥} < \frac{٨}{٣}$

× $\{|\frac{٣}{٤}| ، |-\frac{٣}{٤}|\}$ بعد اعادة التعريف $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٤}$

وبما أن ٣ = ٣

فإن $\frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}$

أي أن $|\frac{٣}{٤}| = |-\frac{٣}{٤}|$

× جمع الأعداد وطرحها في حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠)

اذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ أعداد نسبية

فإن $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{(أ \times د) + (ب \times جـ)}{ب \times د} = \frac{أ د + ب جـ}{ب د}$

وهذا يسمى الضرب التبادلي في البسط فقط.

وعليه فإن $\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٧} = \frac{(٢ \times ٤) + (٣ \times ٤)}{٣ \times ٧} = \frac{٨ + ١٢}{٢١}$

$= \frac{٢٠}{٢١}$

مع ملاحظة أن $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ صفوف تكافؤ وليس اعداد فقط.

وان $\frac{-٤}{٥} + \frac{١}{٤} = \frac{(-٤ \times ٤) + (١ \times ٥)}{٥ \times ٤} = \frac{-١٦ + ٥}{٢٠}$

$= \frac{-١١}{٢٠} = -\frac{١١}{٢٠}$

ثم ان $\frac{٣}{٥} + ٢ = \frac{٣}{٥} + \frac{٢}{١} = \frac{(٣ \times ١) + (٢ \times ٥)}{٥ \times ١}$

$= \frac{٣ + ١٠}{٥} = \frac{١٣}{٥}$

أما عملية الطرح في حقل الأعداد النسبية فإنها تُحول الى عملية جمع هكذا:

بما أن لكل عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ نظير جمعي أو معكوس في حقل الأعداد النسبية هو $-\frac{أ}{ب}$ فإن العدد النسبي $\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د}$ عدد نسبي آخر $\frac{أ}{ب}$ = العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ + معكوس $\frac{جـ}{د}$

أي أن $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} + \left(\frac{-جـ}{د}\right) = \frac{أد + (-ب\,جـ)}{ب \times د}$

$= \frac{أد - ب\,جـ}{ب \times د}$

مثال:

$$\frac{٣}{٧} - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٧} + \frac{-٢}{٥} = \frac{(٣ \times ٥) + (-٢ \times ٧)}{٧ \times ٥} = \frac{١٥ - ١٤}{٣٥}$$

$$= \frac{١}{٣٥}$$

أو الطرح مباشرة مثل:

$$\frac{٣}{٧} - \frac{٢}{٥} = \frac{(٣ \times ٥) - (٢ \times ٧)}{٧ \times ٥} = \frac{١٥ - ١٤}{٣٥} = \frac{١}{٣٥}$$

وكذلك:

$$\frac{-١٦}{٣} - \frac{٩}{٤} = \frac{(-١٦ \times ٤) - (٣ \times ٩)}{٣ \times ٤} = \frac{-٦٤ - ٢٧}{١٢} = \frac{-٩١}{١٢}$$

هذا ويمكن اجراء عملية الجمع والطرح بتوحيد المقامات كما يلي:

$$\frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٧} = \frac{٢}{٣}\frac{\times ٧}{\times ٧} + \frac{٥ \times ٣}{٧ \times ٣} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{١٥}{٢١}$$

$$= \frac{٢٩}{٢١}$$

× ضرب الأعداد وقسمتها في حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠)

اذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ أعداد النسبية.

فإن $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times جـ}{ب \times د}$

وهذا يسمى الضرب الأفقي (ضرب البسط × البسط والمقام × المقام).

مثال:

$$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} = \frac{١ \times ١}{٢ \times ٥} = \frac{١}{١٠}$$

وكذلك $\frac{-٢}{٣} \times \frac{-٥}{٧} = \frac{(-٢)(-٥)}{(٣)(٧)} = \frac{١٠}{٢١}$

وكذلك $٣\frac{١}{٢} \times ٤\frac{٢}{٣} = \frac{٧}{٢} \times \frac{-١٤}{٣} = \frac{(-٧)(\cancel{-١٤}^{-٧})}{(\cancel{٢})(٣)} = \frac{-٤٩}{٣}$

$= ١٦\frac{١}{٣}$ وهكذا...

وكون ضرب الاشارات في حقل الأعداد النسبية يطابق تماماً ضربها في حلقة الأعداد الصحيحة، أي أن:

يكون حاصل ضرب عددين لسببين موجباً اذا كان للعددين النسبية الاشارة نفسها ويكون حاصل ضرب العددين النسبين سالباً اذا كان للعددين النسبيين اشارتان مختلفتان.

وأما عملية القسمة في حقل الأعداد النسبية فتعرف كما يلي:

اذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ عددين نسبيين

فإن $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times$ مقلوب $\frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$

$= \frac{أ\,د}{ب\,جـ}$ ضرب افقي كون $\frac{د}{جـ}$ مقلوب $\frac{جـ}{د}$

مثال:

أوجد $\frac{٢}{٣} \div \frac{٥}{٧} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٧}{٥} = \frac{١٤}{١٥}$

وكذلك $\dfrac{\frac{١}{١} - \frac{٨}{٢٧}}{\frac{١}{٩} - \frac{٢}{٢٧}} = \dfrac{\frac{١ \times ٢٧ - ٨ \times ١}{٢٧}}{\frac{١ \times ٢٧ - ٢ \times ٩}{٩ \times ٢٧}} = \dfrac{\frac{٢٧ - ٨}{٢٧}}{\frac{٢٧ - ٨}{٩ \times ٢٧}}$

$= \dfrac{\frac{١٩}{٢٧}}{\frac{١٩}{٩ \times ٢٧}} = \frac{١٩}{\cancel{٢٧}} \times \frac{\cancel{٢٧}}{١} = \frac{١٩}{١} = ١٩$

أمثلة محلولة

مثال (١)

أوجد $\frac{٢}{١٥} + \frac{٩}{٣}$ ، $\frac{٩}{٣} + \frac{٢}{١٥}$

$$\frac{٢}{١٥} + \frac{٩}{٣} = \frac{٢ \times ٣ + ٩ \times ١٥}{١٥ \times ٣} = \frac{٦ + ١٣٥}{٤٥} = \frac{\cancel{١٤١}^{٤٧}}{\cancel{٤٥}_{١٥}}$$

$$= \frac{٤٧}{١٥}$$

$$\frac{٩}{٣} + \frac{٢}{١٥} = \frac{٩ \times ١٥ + ٣ \times ٢}{٣ \times ١٥} = \frac{١٣٥ + ٦}{٤٥} = \frac{١٤١}{٤٥}$$

$$= \frac{٤٧}{١٥}$$

ولّما كان $\frac{٤٧}{١٥} = \frac{٤٧}{١٥}$

فإن $\frac{٢}{١٥} + \frac{٩}{٣} = \frac{٩}{٣} + \frac{٢}{١٥}$ وهذا المثال يجسِّد الخاصية التبديلية للجمع في حقل الأعداد النسبية

مثال (٢):

أوجد $\frac{٢}{١٥} - \frac{٩}{٣}$ ، $\frac{٩}{٣} - \frac{٢}{١٥}$

$$\frac{٢}{١٥} - \frac{٩}{٣} = \frac{٢ \times ٣ - ٩ \times ١٥}{١٥ \times ٣} = \frac{٦ - ١٣٥}{٤٥} = \frac{-١٢٩}{٤٥}$$

$$\frac{٩}{٣} - \frac{٢}{١٥} = \frac{٩ \times ١٥ - ٣ \times ٢}{٣ \times ١٥} = \frac{١٣٥ - ٦}{٤٥} = \frac{١٢٩}{٤٥}$$

ولما كان $\frac{-١٢٩}{٤٥} \neq \frac{١٢٩}{٤٥}$

فإن $\frac{٢}{١٥} - \frac{٩}{٣} \neq \frac{٩}{٣} - \frac{٢}{١٥}$ وهذا المثال يجسِّد الخاصية غير التبديلية للطرح في حقل الأعداد النسبية

مثال (٣):

أوجد $\frac{٢}{١٥}\times\frac{٩}{٣}$ ، $\frac{٩}{٣}\times\frac{٢}{١٥}$

$$\frac{٢}{١٥}\times\frac{٩}{٣}=\frac{٢}{٥}$$

$$\frac{٩}{٣}\times\frac{٢}{١٥}=\frac{٢}{٥}$$

ولما كان $\frac{٢}{٥}=\frac{٢}{٥}$

فإن $\frac{٢}{١٥}\times\frac{٩}{٣}=\frac{٩}{٣}\times\frac{٢}{١٥}$ وهذا المثال يجسّد الخاصية التبديلية للضرب في حقل الأعداد النسبية

مثال (٤):

أوجد $\frac{٢}{١٥}\div\frac{٩}{٣}$ ، $\frac{٩}{٣}\div\frac{٢}{١٥}$

$$\frac{٢}{١٥}\div\frac{٩}{٣}=\frac{٢}{١٥}\times\frac{٣}{٣}=\frac{٢}{٤٥}$$

$$\frac{٩}{٣}\div\frac{٢}{١٥}=\frac{٩}{٣}\times\frac{١٥}{٢}=\frac{٤٥}{٢}$$

ولما كان $\frac{٢}{٤٥}\neq\frac{٤٥}{٢}$

فإن $\frac{٢}{١٥}\div\frac{٩}{٣}\neq\frac{٩}{٣}\div\frac{٢}{١٥}$ وهذا المثال يجسد الخاصية غير التبديلية للقسمة في حقل الأعداد النسبية

مثال (٥):

أوجدنا $\left(\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٢}\right)+\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٢}{٣}+\left(\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٤}\right)$

بعد الحل المطول والبسيط ينتج أن:

$$\left(\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٢}\right)+\frac{٣}{٤}=\frac{٦}{٧}+\frac{٣}{٤}=\frac{٢٣}{١٢}$$

وكذلك $$\frac{٢}{٣}+\left(\frac{١}{٢}+\frac{٣}{٤}\right)=\frac{٢}{٣}+\frac{١٠}{٨}=\frac{٢٣}{١٢}$$

الخاصية التحقق لعملية الجمع في حقل الأعداد النسبية

وكذلك للضرب حيث:

$$\left(\frac{٥}{٣}\times\frac{١}{٢}\right)\times\frac{٣}{٤}=\frac{١}{\cancel{٣}}\times\frac{\cancel{٢}}{٤}=\frac{١}{٤}$$

وحيث $$\frac{٢}{٣}\times\left(\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٤}\right)=\frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٣}_{١}}\times\frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٨}_{٤}}=\frac{١}{٤}$$

وأما للطرح والقسمة فلا تتحقق الخاصية ..؟؟.. تأكد أنت من ذلك؟

مثال (٦):

أوجد $\frac{٢}{٧}\times\left(\frac{١٤}{٣}+\frac{٢١}{٤}\right)$ ، $\left(\frac{٢}{٧}\times\frac{١٤}{٣}\right)+\left(\frac{٢}{٧}\times\frac{٢١}{٤}\right)$

$$\frac{٢}{٧}\times\left(\frac{١٤}{٣}+\frac{٢١}{٤}\right)=\frac{٢}{٧}\times\left(\frac{١٤\times ٤+٢١\times ٣}{٣\times ٤}\right)$$

$$=\frac{٢}{٧}\left(\frac{٥٦+٦٣}{١٢}\right)=\frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٧}_{١}}\times\frac{\cancel{١١٩}^{١٧}}{\cancel{١٢}_{٦}}=\frac{١٧}{٦}$$

$$\left(\frac{٢}{\cancel{٧}_{١}}+\frac{\cancel{١٤}^{٢}}{٣}\right)+\left(\frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٧}_{١}}\times\frac{\cancel{٢١}^{٣}}{\cancel{٤}_{٢}}\right)=\frac{٤}{٣}+\frac{٤}{٣}=\frac{٨+٩}{٦}=\frac{١٧}{٦}$$

أي أن $$\frac{٢}{٧}\left(\frac{١٤}{٣}+\frac{٢١}{٤}\right)=\left(\frac{٢}{٧}\times\frac{١٤}{٣}\right)+\left(\frac{٢}{٧}\times\frac{٢١}{٤}\right)$$

وهذا المثال يجسّد خاصية توزيع عملية الضرب على عملية الجمع في حقل الاعداد النسبية.

والسؤال الآن هل تتوزع عملية الجمع على الضرب؟

أي هل $$\frac{٢}{٧}+\left(\frac{١٤}{٣}\times\frac{٢١}{٤}\right)\overset{؟}{=}\left(\frac{٢}{٧}+\frac{١٤}{٣}\right)\times\left(\frac{٢}{٧}+\frac{٢١}{٤}\right)$$

$$\frac{٢}{٧} + \left(\frac{١٤}{٣} \times \frac{٢١}{٤}\right) = \frac{٢}{٧} + \frac{٤٩}{٢} = \frac{٤ + ٣٤٣}{١٤} = \frac{٣٤٧}{١٤}$$

$$= ٢٤,٧٨$$

$$\left(\frac{٢}{٧} + \frac{١٤}{٣}\right) \times \left(\frac{٢}{٧} + \frac{٢١}{٤}\right) = \frac{٦ + ٩٨}{٢١} \times \frac{٨ + ١٤٧}{٢٨}$$

$$= \frac{١٠٤}{٢١} \times \frac{١٥٥}{٢٨} = \frac{٢٦ \times ١٥٥}{١٤٧} = \frac{٤٠٣٠}{١٤٧} = ٢٧,٤١$$

الجواب: لا.

"فالضرب يتوزع على الجمع فقط" أما الجمع فلا يتوزع على الضرب.

والسؤال الآن هل تتوزع عملية الضرب على عملية الطرح في حقل الأعداد النسبية؟ تأكد مما تقول. بأمثلة فقط.

التمثيل العشري للأعداد النسبية في (ك، +، ٠)

كون العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ كسر عادي بأبسط صورة، بسطه أ ومقامه ب، لذا فإنه يمكن كتابته على صورة كسر عشري بواحدة من الطريقتين التاليتين:

× تمثيل عشري منته وذلك بقسمة البسط على المقام كما في الأمثلة التالية:

$\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥ ، $\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢ ، $\frac{١٠}{٢}$ =٥,٠ وهكذا

× تمثيل عشري غير منته ولكنه متكرر –دوري- Recuving Decimal وذلك بقسمة البسط على المقام كما في الأمثلة التالية:

$\frac{٢}{٩}$ = ٠,٢٢٢٠٠٠ = $٠.\overline{٢}$ والأصفار علامة التكرار

$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٠٠٠ = $٠.\overline{٣}$ والأصفار علامة التكرار

$\frac{٥٦}{٩٩}$ = ٠,٥٦٥٦٥٦ = $٠.\overline{٥٦}$

$\frac{١}{١}$ = ٠,٩٩٩٠٠٠ = $٠.\overline{٩}$ وهكذا...

والعكس صواب أي يمكن وضع الكسر العشري بصورة عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ كما يلي:

× فالعدد النسبي المولد للكسر العشري ٠,٨ هو:

$\frac{\cancel{٨}^{٤}}{\cancel{١٠}_{٥}} = \frac{٤}{٥}$

× العدد النسبي المولد للكسر العشري $٠.\overline{٧}$ هو:

بما أن $٠.\overline{٧}$ = ٠,٧٧٧٠٠٠ لاحظ تكرار الرقم ٧

أي أن ٠,٧ = $\frac{٧}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٧}{١٠٠٠}$

ويوضح س = $٠.\overline{٧}$

∴ $س = \frac{٧}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٧}{١٠٠٠} + ...$ وبعد ضرب الطرفين بالعدد ١٠ (كون رقم واحد يدور أو يتكرر)

$$١٠س = ٧ + \left(\frac{٧}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٧}{١٠٠٠} + ...\right) = ٧ + س$$

∴ ١٠ س = ٧ + س

٩س = ٧ ⟵ $س = \frac{٧}{٩}$ العدد النسبي المولد للكسر العشري $٠.\overline{٧}$

وكذلك ما العدد النسبي المولد للكسر العشري $٠.\overline{٣٧}$

$٠.\overline{٣٧} = ٠,٣٧٣٧٣٧...$

$$= \frac{٣٧}{١٠٠} = \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠} = \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠٠} + ...$$

ويوضع $س = ٠.\overline{٣٧}$

∴ $س = \frac{٣٧}{١٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠٠} + ...$ وبعد ضرب الطرفين بالعدد ١٠٠ (كون رقمين يدوران أو يتكرران)

$$∴ ١٠٠س = ٣٧ + \left(\frac{٣٧}{١٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٣٧}{١٠٠٠٠٠٠} + ...\right)$$

١٠٠س = ٣٧ + س

٩٩س = ٣٧ ⟵ $س = \frac{٣٧}{٩٩}$ العدد النسبي المولد للكسر العشري $٠.\overline{٣٧}$

ملحوظة:

ولمعرفة فيما اذا كان العدد النسبي يولد كسر عشري منتهي أو لا نقول: بعد تبسيط العدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ ، فإذا كان عوامل المقام ب هما (٢ ، ٥) فقط فإنه منته مثل $\frac{٣}{١٠}$ واذا كان عوامل المقام ب هما (٣ ، ٧) فإنه دوري مثل $\frac{٥}{٢١}$ وهكذا.

وهناك خاصية التكاثف للأعداد النسبية ومفادها أن حقل الأعداد النسبية (ك، + ، ٠) كثيف أي أن بين أي عددين نسبيين غير متساويين أعداد نسبية عديدة.

فللعددين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ وعندما $\frac{أ}{ب} < \frac{جـ}{د}$ يوجد أعداد نسبية عديدة ومنها على سبيل المثال:

$$\text{العدد} = \frac{\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د}}{٢}$$

مثال:

بين العددين النسبيين $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٣}$ أعداد نسبية عديدة منها:

$$\text{العدد الأول} = \frac{\frac{١}{٥} + \frac{١}{٣}}{٢} = \frac{\frac{٣ + ٥}{١٥}}{\frac{٢}{١}} = \frac{\frac{٨}{١٥}}{\frac{٢}{١}} = \frac{\cancel{٨}^{٤}}{١٥}$$

$$= \frac{١}{\cancel{٢}_{١}} = \frac{٤}{١٥}$$

وينتج أن $\frac{١}{٥} < \frac{٤}{١٥} < \frac{١}{٣}$ وبين العددين النسبة $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{١٥}$ هناك أعداد نسبية عديدة منها:

$$\text{العدد الثاني} = \frac{\frac{١}{٥} + \frac{٤}{١٥}}{٢} = \frac{\frac{١٥ + ٢٠}{٧٥}}{\frac{٢}{١}} = \frac{\frac{٣٥}{٧٥}}{\frac{٢}{١}} = \frac{\cancel{٣٥}^{٧}}{\cancel{٧٥}_{١٥}}$$

$$= \frac{١}{\cancel{٢}_{٥}} = \frac{٧}{٣٠}$$

وينتج أن $\frac{١}{٥} < \frac{٧}{٣٠} < \frac{٤}{١٥} < \frac{١}{٣}$ وهكذا..

وتمثيلها على خط الأعداد يمكن أن يكون:

$$\longleftarrow \quad ٠ \quad \frac{١}{٥} \quad \frac{٧}{٣٠} \quad \frac{٤}{١٥} \quad \frac{١}{٣} \quad \longrightarrow$$

ومن أجل التحقق من صحة ما سبق توحيد المقامات كالتالي:

$\frac{٦}{٣٠} < \frac{٧}{٣٠} < \frac{٨}{٣٠} < \frac{١٠}{٣٠}$ وهكذا على التوالي:

× حقل الأعداد الحقيقية (ح، +، ٠) :Real Field

حقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ٠) نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مكون من ثلاثي مرتب:

مسقطه الأول مجموعة الأعداد الحقيقية :Real Number

وهي المجموعة المكونة من مجموعة الأعداد الطبيعية $ط^+$ = {١ ، ٢، ٣، ٠٠٠}

مجموعة الأعداد الكلية ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٠٠٠}

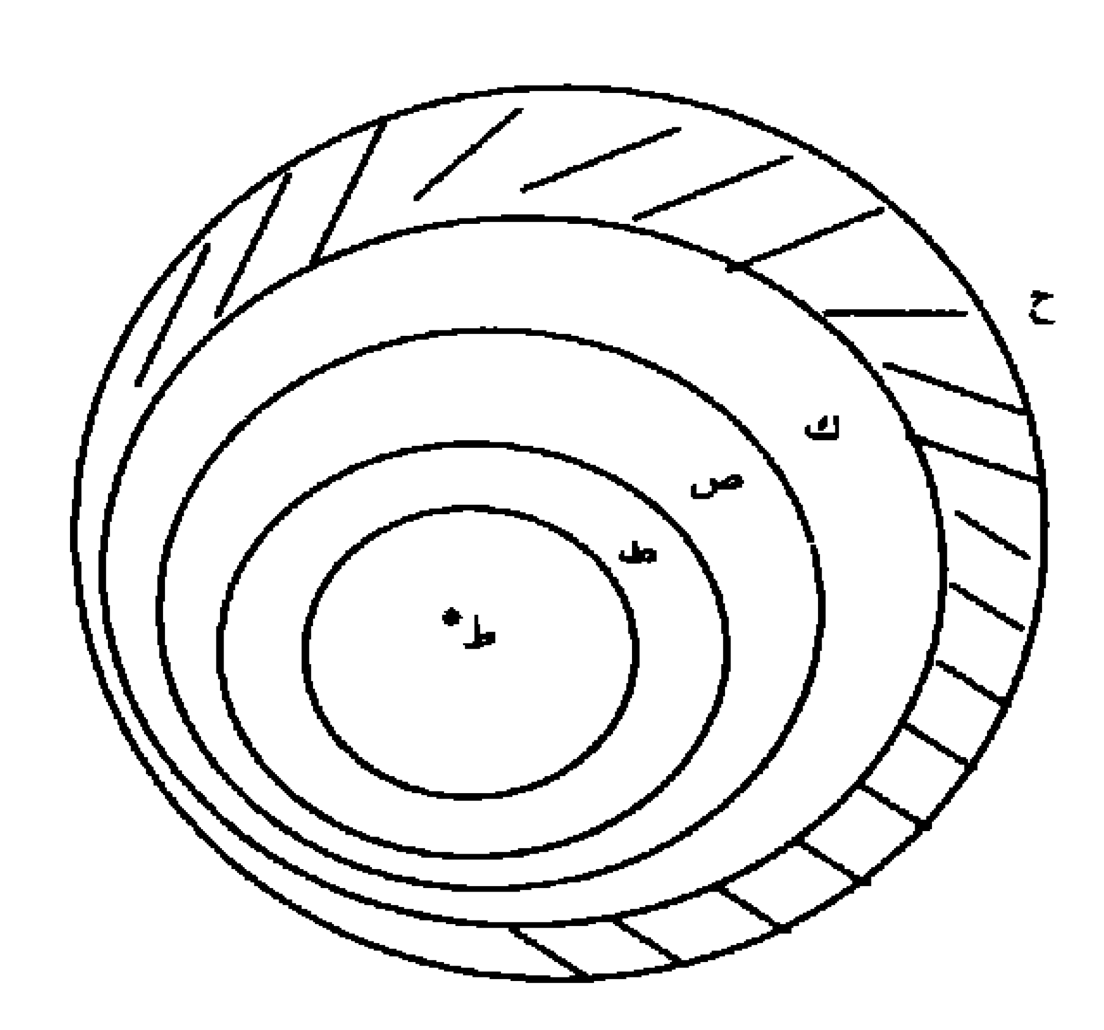
ومجموعة الأعداد الصحيحة ص= {٠، ± ١، ± ٢، ± ٣ ، ٠٠٠}

ومجموعة الأعداد النسبية ك = { ، أ ∍ ص، ب ∍ $ص^*$}

وأعداد أخرى حقيقية لا تنتمي الى أي من المجموعات السابقة تسمى الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

مثل:

π ≈ ٣,١٤ ، ٢ ، ٣ ، ٥ وغيرها كما في المخطط التالي:

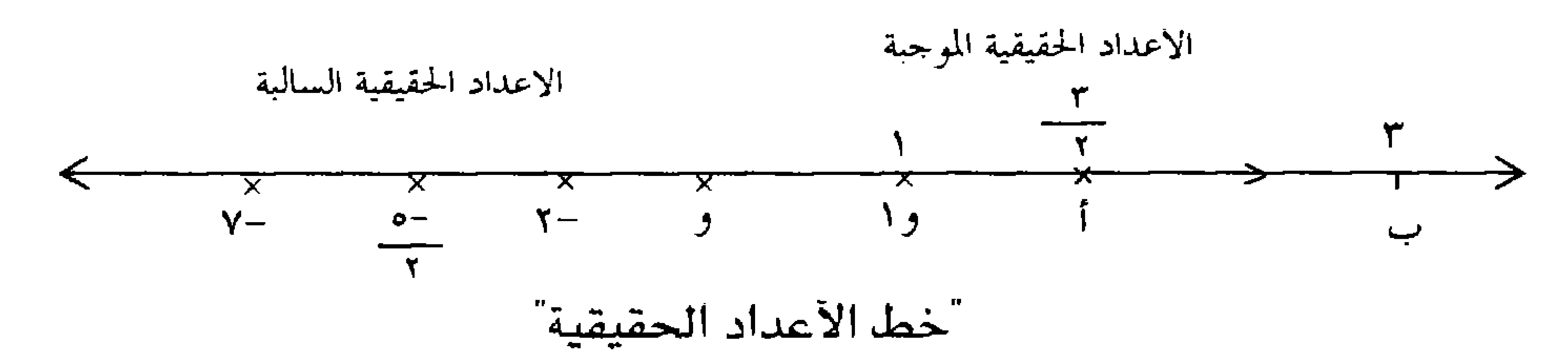


حيث المنطقة المظللة تمثل الأعداد الحقيقية غير النسبية وهي ح – ك فالعدد الحقيقي هو العدد الطبيعي ٤ والعدد الكلي صفر والعدد الصحيح - ٥ والعدد النسبي $\frac{٣}{٤}$ والكسر العشري المنحني ٠,٧٥ والكسر العشري الدوري ٠,٤ والعدد غير الدوري مثل ٠,١٥١١٥١١١٥٠٠٠ جميعها أعداد حقيقية.

ومسقطه الثاني عملية الجمع العادية (+)

ومسقطه الثالث عملية الضرب العادية (٠)

والآن جاء الوقت لنطلق على خط الأعداد اسم "خط الأعداد الحقيقية" كون جميع الأعداد هي أعداد حقيقية (ما عدا المركبة منها) ويمكن تمثيلها بنقط على خط الأعداد كما يلي:



"خط الأعداد الحقيقية"

والسؤال الذي يتبادر الى الأذهان الآن هو:

لماذا الأعداد الحقيقية، ألا تكفي الأعداد النسبية والصحيحة والكلية والطبيعية لأغراض القياس لدى الانسان؟

والجواب:

عندما نقول مكثنا في مدينة العقبة ثلاثة أيام (عدد طبيعي) وأقمنا في فندق منخفض عن سطح البحر بمقدار خمسة أمتار (عدد صحيح) وتناولنا فيه ثلثي سمكة كبيرة (عدد نسبي)، فإننا لا نستطيع استخدام عناصر من هذه المجموعات العددية (الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية) لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية طولا كل من ضلعي القائمة فيه ١ سم هكذا:

الوتر ١سم ١سم

(الوتر)^{٢} = (١)^{٢} + (١)^{٢} = ٢ (نظرية نتباغوري الشهيرة)

∴ الوتر = $\sqrt{٢}$ هذا العدد ليس نسبياً ولا صحيحاً ولا كلياً ولا طبيعياً، لذلك نحتاج الى استخدام مجموعة أخرى للقياس تضم أعداداً مثل $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$، ... تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية. من هنا كان حقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ٠)

ومن الجدير بالذكر أن اجراء العمليات الأربع: جمع (+)، طرح (−)، ضرب (×)، وقسمة (÷) في حقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ·) يطابق تماماً اجرائها في حقل الأعداد النسبية (ك، + ، ·) لذا لا نود اعادة ذكرها في هذا السياق.

ولحقل الأعداد الحقيقية من الخصائص والصفات ما ليس لغيره من الحقول والحلقات نوردها هنا كما يلي:

× علامة الترتيب في حقل الأعداد الحقيقية:

وتترجم علاقة الترتيب بالاشارات > أكبر من، < أصغر من أو ≤ أكبر من أو يساوي، ≥ أصغر من أو يساوي.

والأعداد الحقيقية ح إما أن تكون سالبة $ح^-$ أو صفراء أو موجبة $ح^+$ كما هو واضح من الشكل:

أعداد حقيقية سالبة — أعداد حقيقية موجبة

١ > صفر — ١ < صفر

وبالرموز ح = $ح^- \cup \{٠\} \cup ح^+$

والمجموعات الثلاث $ح^-$ ، $\{٠\}$ ، $ح^+$ منفصلة

أي أن $ح^- \cap \{٠\} = ح^- \cap ح^+ = \{٠\} \cap ح^+ = \phi$

وهذا ما يسمى قانون النتلين Tracheotomy Law الرياضيات وخاصية احدى ثلاث.

لكل أ ∋ ح فإن أ > صفر (موجب)

أو أ = صفر

أو أ < صفر (سالب)

أي أن أ $\gtrless$ صفر

فمثلاً $\frac{٣}{٥}$ > صفر، صفر = صفر ، − $\sqrt{٢}$ < صفر وهكذا..

ولكل أ ، ب ∈ ح، ولكون:

أ − ب عدد حقيقي طبعاً.

فإن أ − ب عدد حقيقي موجب عندما أ > ب

وان أ − ب عدد حقيقي هو الصفر عندما أ = ب

وان أ − ب عدد حقيقي سالب عندما أ < ب

وباختصار مفيد:

اما أ > ب أو أ = ب أو أ < ب

وهذا ينتج من قوة علاقة الترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقية.

لذا يسمى حقل الأعداد الحقيقية (ح، + ، ٠) حقل مرتب

لذا يمكن كتابة علاقة الترتيب بالأشكال التالية:

أ > ب والتفسير العدد الحقيقي أ أكبر من العدد الحقيقي ب

أ ≥ ب والتفسير العدد الحقيقي أ أكبر من أو يساوي العدد الحقيقي ب

وبالايجاز أ ≥ ⟵ أ > ب أو أ = ب

وكذلك أ < ب والتفسير العدد الحقيقي أ أصغر من العدد الحقيقي ب

أ ≤ ب والتفسير العدد الحقيقي أ أصغر من أو يساوي العدد الحقيقي ب

أي أن أ ≤ ب ⟵ أ < ب أو أ = ب

وكذلك أ ≷ ب ⟵ أ > ب أو أ < ب

وأخيراً أ ⋛ ب ⟵ أ > ب أو أ = ب أو أ < ب

والأمثلة عديدة ومنها على سبيل المثال:

٥ ≥ ٤ ⟵ (٥ > ٤) أو (٥ = ٤) مع أن ٥ = ٤ خطأ

إلا أن ٥ ≥ ٤ صواب.

وكذلك $\frac{١}{٢} \geq \frac{١}{٢}$ ⟵ ($\frac{١}{٢} > \frac{١}{٢}$) أو ($\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$)

مع أن $\frac{١}{٢} > \frac{١}{٢}$ خطأ

إلا أن $\frac{١}{٢} \geq \frac{١}{٢}$ صواب

ولعلاقة الترتيب العديد من الخصائص نجملها بما يلي:

، اذا كان للعددين الحقيقيين أ ، ب نفس الاشارة

فإن (أ) (ب) ⟵ صفر

مثل (+ ٥) (+ ٤) = (- ٥) (- ٤) = (+ ٢٠) > صفر

واذا كان لهما اشارات مختلفة فإن (أ) (ب) > صفر

مثل (+ ٥) (- ٤) = (- ٥) (+ ٤) = (- ٢٠) < صفر

× اذا كان أ > ب وكان جـ ∈ ح فإن:

أ + جـ > ب + جـ

مثل ٧ > ٥ ⟵ ٧ + ٣ > ٥ + ٣ ⟵ ١٠ > ٨

× اذا كان أ > ب وكان جـ ∈ $ح^+$ فإن:

أ . جـ > ب . جـ

مثل ٨ > ٦ ⟵ ٨ × $\frac{١}{٢}$ > ٦ × $\frac{١}{٢}$ ⟵ ٤ > ٣

× اذا كان أ > ب وكان جـ ∈ $ح^-$ فإن:

أ . جـ < ب . جـ (تعكس اشارة الترتيب > الى <)

مثل ٨ > ٦ ⟵ (٨) (- ١/٢) > (٦) (- ١/٢) ⟵ - ٤ < - ٣

× اذا كان أ ، ب ∋ ح⁺ وكان أ > ب ⟵ فان ١/أ < ١/ب (المقلوب)

تعكس الاشارة

مثل ٣ > ٢ ⟵ ١/٣ < ١/٢

× اذا كان أ ، ب ∋ ح⁻ وكان أ > ب ⟵ فإن ١/أ < ١/ب (المقلوب)

تعكس الاشارة

مثل (- ٣) > (- ٢) ⟵ - ١/٣ < - ١/٢

مثال:

بيّن أن أ² ≤ صفر عندما أ ∋ ح

الحل مكون من شقين:

عندما أ > صفر ⟵ أ . أ ⟵ (موجب) (موجب)

⟵ موجب > صفر

وعندما أ > صفر ⟵ أ . أ ⟵ (سالب) (سالب)

⟵ موجب > صفر

مثل: ٥ > صفر ⟵ (٥)² = ٢٥ > صفر

وعندما أ = صفر ⟵ فإن أ² = صفر

- ٥ > صفر ⟵ (- ٥)² = ٢٢٥ صفر

∴ أ² ≤ صفر

الجذور Roots في حقل الأعداد الحقيقية (ح، +، ·)

نبدأ بمناقشة المفاهيم التالية:

(i) المربع الكامل Complete Square:

هو العدد الحقيقي الموجب الناتج عن حاصل ضرب عددين حقيقيين متساويين موجبين أو حاصل ضرب العدد الحقيقي الموجب في نفسه:

فالعدد ٢٥ مربع كامل لأنه يساوي ٥ × ٥ = ٥ ^٢^

وكذلك العدد ٤٩ مربع كامل لأنه يساوي ٧ × ٧ = ٧ ^٢^

والعدد الحقيقي ٠.٢٥ مربع كامل لأنه يساوي ٠.٢٥ × ٠.٢٥ = (٠.٢٥)^٢^

والسؤال الآن: هل العدد الحقيقي ٢٢٥ مربع كامل؟

والجواب: نستطيع معرفة فيما اذا كان العدد ٢٢٥ مربع كامل أو لا بتحليله الى العوامل الأولية ووضعه بصورة أسية للأس "٢" هكذا:

٢٢٥	٥
٤٥	٥
٩	٣
٣	٣
١	

فالعدد ٢٢٥ = ١٥ × ١٥ = (١٥)^٢^ فهو مربع كامل

وأما العدد ٧٧ فليس مربع كامل كونه لا يمكن وضعه بصورة أسية للأُس ٢

والسؤال الآن معكوس: ما هو العدد الذي اذا ضرب في نفسه مرتين أنتج العدد ٢٢٥؟

الجواب: هو ١٥ لأن ١٥ × ١٥ = (١٥)^٢^ = ٢٢٥

وعند صياغة السؤال السابق على الشكل:

ما هو الجذر التربيعي Square Root للعدد ٢٢٥؟

الجواب: الجذر التربيعي للعدد ٢٢٥ هو ١٥

ونعبر عن ذلك بالرموز هكذا :

$\sqrt[2]{225} = 15$ حيث الرمز $\sqrt[2]{\quad}$ يسمى الجذر التربيعي

والعدد ٢ يسمى دليل الجذر

كما يمكن أن يسمى الجذر الثاني وزمره $\sqrt[2]{\quad}$ الدليل ٢ لا يكتب بشكل عام

والجذر الثالث $\sqrt[3]{\quad}$ الدليل ٣ يسمى الجذر التكعيبي

والجذر الرابع $\sqrt[4]{\quad}$ الدليل ٤

وهكذا

حتى الجذر النوني $\sqrt[ن]{\quad}$ والدليل ن عدد طبيعي كون ن١

أي أن ن > ١

وكذلك $\sqrt{64} = ??$

نحلل العدد ٦٤ الى عوامله الأولية هكذا :

ونأخذ من كل عاملين (الدليل ٢) متساويين

عامل واحد ونضربها في بعضها هكذا :

٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

٢ × ٢ × ٢

$\sqrt{64} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= 2 \times 2 \times 2 = 8$

وبنفس الأسلوب: $\sqrt{196} = 2 \times 7$

$= 14$

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

٢ × ٧

ملحوظة:

لو سألنا أنفسنا هذا السؤال: ما هو العدد الحقيقي الذي اذا ضُرب في نفسه مرتين أنتج العدد - ١٦ (وبشكل عام عدد حقيقي سالب) لكان الجواب هذا مستحيل كون العدد السالب × نفسه = موجب وكون العدد الموجب × نفسه = موجب.

لذا يمكن أن يقال بشكل عام:

أي أن $\sqrt{س}$ ، س $\geq$ صفر فالمربع الكامل دائماً عدد موجب.

وجذره التربيعي موجب ايضاً.

والمطلوب الآن ايجاد $\sqrt{٧٧}$

وبما أن العدد الحقيقي ٧٧ ليس مربعاً كاملاً كما أسلفنا من قبل فإنه عند تحليله الى عوامله لا ينتج عوامل زوجية متطابقة.

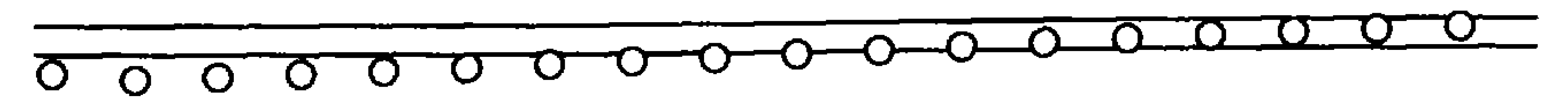
لكن لا تيأس، فهناك طريقتان لإيجاد $\sqrt{٧٧}$ بشكل خاص، وكذلك لإيجاد $\sqrt{س}$ ، حيث س مربع غير كامل بشكل عام، شرط أن س $\geq$ صفر دائماً. هما:

الطريقة التقريبية:

والتي لا تنتج عدداً حقيقياً دقيقاً بل مقرب كما يلي:

لايجاد $\sqrt{٧٧}$ نحصر العدد ٧٧ بين مربعين كاملين متتاليين. والمربعان الكاملان المتتاليان هما المربعان الكاملان لعددين حقيقيين متتاليين،

وفي هذا السياق ندوّن بعض المربعات الكاملة أو مربعات الأعداد الحقيقية من ١ الى ١٠ كما يلي:



العدد	مربعه
١	١ × ١ = (١)^{٢} = ١
٢	٢ × ٢ = (٢)^{٢} = ٤
٣	٣ × ٣ = (٣)^{٢} = ٩
٤	٤ × ٤ = (٤)^{٢} = ١٦
٥	٥ × ٥ = (٥)^{٢} = ٢٥
٦	← ٣٦
٧	← ٤٩
٨	← ٦٤
٩	← ٨١
١٠	← ١٠٠

وهكذا ..

نعود لإيجاد $\sqrt{٧٧}$

٦٤ > ٧٧ > ٨١ (٦٤ ، ٨١ مربعان كاملان متتاليان)

وبأخذ الجذر التربيعي للأطراف $\sqrt{٦٤} < \sqrt{٧٧} < \sqrt{٨١}$

أي أن $\sqrt{٨} < \sqrt{٧٧} < \sqrt{٩}$

أي أن $\sqrt{٧٧} \in (٨، ٩)$

وبما أن العدد ٧٧ أقرب الى العدد ٨١

فإن $\sqrt{٧٧}$ أقرب الى $\sqrt{٨١}$

أي أن $\sqrt{٧٧}$ أقرب للعدد ٩

الجذور التربيعية: ٨ ، $\sqrt{٧٧}$ ، ٩

الاعداد: ٦٤ ، ٧٧ ، ٨١

الفرق = ١٣ ، الفرق = ٤

وهذا التقريب ينتج بعد أن نجد منتصف المسافة بين العددين ٩ ، ٨ هكذا :

$$\frac{٩ + ٨}{٢} = ٨,٥$$

أي أن $\sqrt{77} \in \{8.6 ، 8.7 ، 8.8 ، 8.9\}$

$\sqrt{77}$

٨.٥ ٨.٦ ٨.٧ ٨.٨ ٨.٩ ٩

ولكن الجواب الأقرب الى الحقيقة هو ما يمكن ايجاده بالطريقة الثانية:

الطريقة الدقيقة: وتتم بإيجاد $\sqrt{77}$ بواسطة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب هكذا:

$\sqrt{77} = 8.8$ باستخدام الآلة الحاسبة ولأقرب منزلة عشرية واحدة

لاحظ أن $8.8 \in \{8.6 ، 8.7 ، 8.8 ، 8.9\}$

(ii) **المكعب الكامل** Complete Cubic:

هو العدد الحقيقي (الموجب أو السالب) الناتج عن حاصل ضرب ثلاثة أعداد متساوية سواء أكانت موجبة أو سالبة في بعضها.

فالعدد ١ مكعب كامل لأن $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1$

والعدد -1 مكعب كامل لأن $-1 = (-1)(-1)(-1) = (-1)^3 = -1$

والعدد ٢٧ مكعب كامل لأن $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

والعدد -64 مكعب كامل لأن $-64 = (-4)(-4)(-4) = (-4)^3$

والعدد ٠.١٢٥ مكعب كامل لأن $0.125 = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = (0.5)^3 = 0.125$

وهكذا....

والسؤال الآن: هل العدد الحقيقي ٦٤ مكعب كامل؟

والجواب: نستطيع معرفة فيما اذا كان العدد ٦٤ مكعب كامل أولاً وذلك بتحليله الى عوامله الأولية "وضعه بصورة أسية للأس ٣" هكذا:

فالعدد ٦٤ = ٤ × ٤ × ٤ = (٤)^{٣} فهو مكعب كامل

وأما العدد ٧٧ فليس مكعب كامل كونه لا يمكن وضعه بصورة أسية للأس ٣

والسؤال الآن معكوس: ما هو العدد الذي اذا ضرب في نفسه ثلاث مرات أنتج العدد ٦٤؟

الجواب: العدد هو ٤ لأن ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

ويمكن صياغة السؤال السابق على الشكل التالي:

ما هو الجذر التكعيبي Cubi Croot للعدد ٦٤؟

والجواب: الجذر التكعيبي للعدد ٦٤ هو ٤

وبالرموز $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤ الدليل "٣"

ويمكن أن يسمى $\sqrt[٣]{}$ الجذر الثالث.

مثال:

أوجد $\sqrt[٣]{٢١٦}$

نحلل العدد ٢١٦ الى عوامله الأولية ونأخذ من كل ثلاثة عوامل أولية متطابقة عامل واحد ونضربها في بعضها هكذا:

العدد	العامل	
٢١٦	٢	
١٠٨	٢	٢
٥٤	٢	
		×
٢٤	٣	
٩	٣	٣
٣	٣	
١		

$\sqrt[٣]{٢١٦}$ = ٣ × ٣ = ٦

مثال:

أوجد $\sqrt[٣]{-٨}$

نحلل العدد -8 الى عوامله الأولية

كعوامل سالبة ونأخذ من كل ثلاثة

عوامل أولية متطابقة عامل ونضربها

في بعضها هكذا:

-8	-2
4	-2
-2	-2
1	

$\{-2, -2, -2\} \rightarrow -2$

$\therefore \sqrt[3]{-8} = -2$

مع ملاحظة أن نهاية التحليل يجب أن تعطى العدد "1" الموجب

تنبيه!!!

عندما يكون الدليل زوجي مثل $\sqrt{س}$ ، $\sqrt[4]{س}$ ، $\sqrt[6]{س}$ ، ...

فما بداخل الجذر (العدد س) يجب أن يكون موجب أو صفر

أي أن س $\geq$ صفر $\in$ ح$^+$ $\cup$ $\{0\}$ فقط.

وعندما يكون الدليل فردي مثل $\sqrt[3]{س}$ ، $\sqrt[5]{س}$ ، $\sqrt[7]{س}$ ، ...

فما بداخل الجذر (العدد س) يمكن أن يكون موجب أو صفر أو سالب

أي أن س $\in$ ح

والمطلوب الآن ايجاد $\sqrt[3]{77}$

بما أن العدد 77 ليس مكعباً كاملاً كما أسلفنا من قبل، فإنه عند تحليله الى عوامله الأولية لا ينتج عوامل متطابقة ثلاثية.

ولكن لا تيأس فهناك طريقتان لإيجاد $\sqrt[3]{77}$ بشكل خاص أي أن $\sqrt[3]{س}$

س مكعب غير كامل بشكل عام.

علماً بأن س $\in$ ح أي موجب أو صفر أو سالب.

وبأسلوب مماثل لأسلوب ايجاد $\sqrt{77}$ نجد $\sqrt[3]{77}$ وهكذا:

الطريقة التقريبية: نحصر العدد ٧٧ بين مكعبين كاملين متتالين.

والمكعبان الكاملان المتتاليان هما المكعبان الكاملان لعددين حقيقيين متتالين وفي هذا السياق ندون بعض المكعبات الكاملة أو مكعبات الأعداد الحقيقية من ١ الى ١٠ هكذا:

العدد	مكعبه
١	١ × ١ × ١ = $(١)^{٣}$ = ١
٢	← ٨
٣	← ٢٧
٤	← ٦٤
٥	← ١٢٥
٦	← ٢١٦
٧	← ٣٤٣
٨	← ٥١٢
٩	← ٧٢٩
١٠	← ١٠٠٠

وهكذا ..

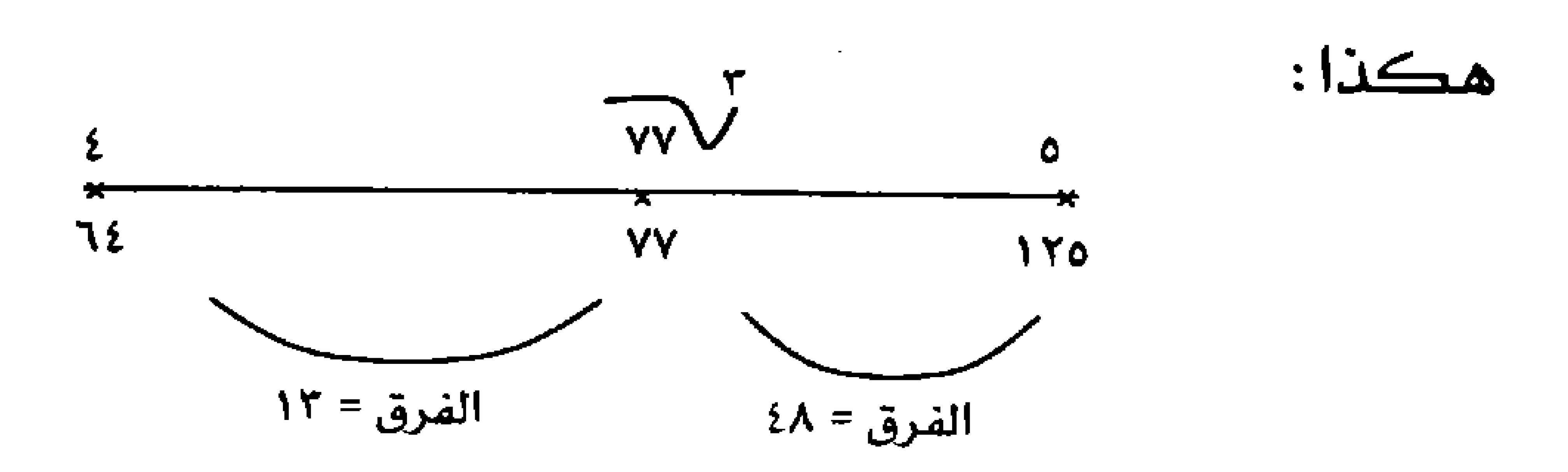
بما أن ٦٤ ٧٧ ١٢٥ (٦٤ ، ١٢٥ مكعبان متتاليان)

وبأخذ الجذر التكعيبي لجميع الأطراف $\sqrt[٣]{٦٤} < \sqrt[٣]{٧٧} < \sqrt[٣]{١٢٥}$

ومنها $٤ < \sqrt[٣]{٧٧} < ٥$

والآن نود معرفة ان قيمة $\sqrt[٣]{٧٧}$ أهي أقرب للعدد ٤ أم للعدد ٥ ؟

هكذا:



بما أن العدد ٧٧ أقرب للعدد ٦٤ كون الفرق بينهما أقل من الفرق بين ٧٧ ، ١٢٥ كما في الشكل.

فإن $\sqrt[3]{77}$ أقرب للعدد ٤

وهذا التقريب ينتج كما يلي:

نجد منتصف المسافة بين العددين ٤ ، ٥ هكذا: $\frac{4 + 5}{2} = 4.5$

لذا فإن $\sqrt[3]{77}$ يمكن أن تساوي واحد من الأعداد التالية:

أي أن ٤ ، ٤٫١ ، ٤٫٢ ، ٤٫٣ ، ٤٫٤

$\sqrt[3]{77} \in \{4.1 ، 4.2 ، 4.3 ، 4.4\}$

ولكن الجواب الأقرب الى الحقيقة هو ما يمكن ايجاده بالطريقة الثانية:

الطريقة الدقيقة: يتم ايجاد $\sqrt[3]{77}$ بواسطة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب هكذا:

$\sqrt[3]{77} = 4.2$ باستخدام الآلة الحاسبة

ولأقرب منزلة عشرية واحدة.

لاحظ أن $4.2 \in \{4.1 ، 4.2 ، 4.3 ، 4.4\}$

دونك الآن بعض خصائص الجذور التربيعية والتكعيبية بشكل خاص:

× لكل س ، ص $\in$ ح$^+$ (موجبة فقط)

فإن $\sqrt{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$ والعكس أيضاً صواب.

أي أن $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$

مثال:

$$\sqrt{\frac{٨١}{١٢١}} = \frac{\sqrt{٨١}}{\sqrt{١٢١}} = \frac{٩}{١١}$$

وكذلك:

$$\frac{\sqrt{٦٤}}{\sqrt{١٦}} = \sqrt{\frac{٦٤}{١٦}} = \sqrt{٤} = ٢$$

× **لكل** $\text{س} ، \text{ص} \in \text{ح}^{+}$ **(موجبة فقط)**

فإن $\sqrt{\text{س ص}} = \sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{ص}}$ **والعكس أيضاً صواب**

أي أن $\sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س ص}}$

مثال:

$$\sqrt{٠٫٠١ \times ٦٢٥} = \sqrt{٠٫٠١} \times \sqrt{٦٢٥} = ٠٫١ \times ٢٥ = ٢٫٥$$

وكذلك:

$$\sqrt{٥} \times \sqrt{٢٠} = \sqrt{٥ \times ٢٠} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

× **لكل** $\text{س} ، \text{ص} \in \text{ح}$

فإن $\sqrt[٣]{\text{س} . \text{ص}} = \sqrt[٣]{\text{س}} \times \sqrt[٣]{\text{ص}}$

والعكس أيضاً صواب

أي أن $\sqrt[٣]{\text{س}} \times \sqrt[٣]{\text{ص}} = \sqrt[٣]{\text{س ص}}$

مثال:

$$\sqrt[٣]{(-١٢٥)(٦٤)} = \sqrt[٣]{-١٢٥} \times \sqrt[٣]{٦٤} = (-٥)(٤) = -٢٠$$

وكذلك:

$$\sqrt[٣]{-٥} \times \sqrt[٣]{٢٠٠} = \sqrt[٣]{(-٥)(٢٠٠)} = \sqrt[٣]{-١٠٠٠} = -١٠$$

× لكل س ، ص ∈ ح

فإن $\sqrt[3]{\frac{س}{ص}} = \frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

والعكس أيضاً صواب.

أي أن $\frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}} = \sqrt[3]{\frac{س}{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

مثال:

$$\sqrt[3]{\frac{-343}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-343}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-7}{10} = -0.7$$

وكذلك:

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{40}{5}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

مثال:

ما قيمة $(\sqrt{5} + 1)^2$ بأبسط صورة

$$(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 1) = \sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 1) + 1\,(\sqrt{5} + 1)$$

وهذا ما يسمى بقانون التوزيع

$$= 5 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + 1$$

$$= 6 + 2\sqrt{5}$$

هناك ما يسمى انطاق المقام Rationalizing the Denominator:

والمقصود بعملية انطاق المقام أن نضع العدد على صورة كسر عادي مقامه ليس جذراً على الاطلاق وذلك بضربه في مرافقه Conjugate.

مثال:

اكتب صورة أخرى للعدد $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لا يظهر الجذر في مقامه (انطقه)

$\frac{١ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ حيث $\sqrt{٢}$ هو مرافق $\sqrt{٢}$ كما يُقال.

واكتب العدد $\frac{١}{\sqrt{٥} + ٤}$ بصورة لا يظهر الجذر في مقامه

$$\frac{١}{\sqrt{٥} + ٤} \times \frac{\sqrt{٥} - ٤}{\sqrt{٥} - ٤} = \frac{\sqrt{٥} - ٤}{٥ - ١٦} = \frac{\sqrt{٥} - ٤}{-١١}$$

$= -\frac{\sqrt{٥}}{١١} + \frac{٤}{١١}$ (حيث $\sqrt{٥} - ٤$ هو مرافق $\sqrt{٥} + ٤$ كما يُقال)

الفترات في حقل الأعداد الحقيقية

ويرمز لها بالرمز "ف":

والفترات مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح تعتمد على علاقة الترتيب وتقسم الى قسمين محدودة وغير محدودة كما يلي:

الفترات المحدودة:

هي الفترات التي طولها عدداً حقيقياً محدوداً وتظهر على أشكال منها:

* فترة مغلقة [أ ، ب] = { س ∋ ح : أ ≤ س ≤ ب}

مثل:

[٢ ، ٥] = { ٢ ≤ س ≤ ٥}

وعلى خط الاعداد

٢ ٥

والعددان أ ، ب يسميان أطراف الفترة و أ ، ب ∋ [أ ، ب] وطولها ٥ - ٢ = ٣ وحدات طولية.

← فترة مفتوحة (أ ، ب) = {س ∋ ح: أ < س < ب}

مثل:

(٢ ، ٥) = { ٢ < س < ٥ }

وعلى خط الاعداد

٢ ٥

والعددان أ ، ب يسميان أطراف الفترة

لكن أ ، ب ∌ (أ ، ب)

وطولها ٥ – ٢ = ٣ وحدات طولية

← فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة):

[أ ، ب) = {س ∋ ح : أ ≤ س < ب)

وكذلك (أ ، ب] = { س ∋ ح : أ < س ≤ ب]

مثل [٢ ، ٥) = { ٢ ≤ س < ٥ } ⟵ (٢ ، ٥)

وكذلك مثل (٢ ، ٥] = { ٢ < س ≤ ٥} ⟵ (٢ ، ٥)

لكن أ ∋ [أ ، ب) ، و ب ∌ [أ ، ب) وللعكس للأخرى.

وطول كلٍ منها = ٥ − ٢ = ٣ وحدات.

ومن الملاحظ أن الطول نفسه لجميع الفترة المحدودة سواء أكانت مغلقة أو مفتوحة أو نصف هذه وتلك.

والفترات غير المحدودة: هي الفترات التي طولها ليس عدداً حقيقياً.

ولذلك سوف تستخدم الروتين ∞ ويُقرأ موجب ما لا نهاية

و − ∞ ويُقرأ سالب ما لا نهاية

علماً بأن الرمزين ∞، − ∞ ليسا من الأعداد الحقيقية، ولكن لكل عدد حقيقي س يكون − ∞ < س < ∞

وهذا واضح من خط الاعداد الحقيقية التالي:

− ∞   س١   س٢   س٣   س٤   ...   ∞

فأياً من س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، ... هو على خط الاعداد فهو محصور بين الرمزين − ∞ ، ∞ والفترات غير المحدودة هي التي أحد أطرافها ∞ أو − ∞ كما يلي:

لكل أ ∋ ح

فإن [أ ، ∞) = { س : س ∋ ح ، أ ≥ س} كما في الشكل

مثل [٢ ، ∞) = { ٢ ≥ س }

وكذلك (أ ، ∞) = {س : س ∋ ح ، أ > س} كما في الشكل

مثل (أ ، ∞) = { ٢ > س}

ثم (- ∞ ، أ] = { س : س ∋ ح ، س ≥ أ}

مثل (- ∞ ، ٥) = { س ≥ ٥}

وكذلك (- ∞ ، أ) = {س ،س ∋ ح، س > أ}

مثل (- ∞ ، ٥) = { س > ٥}

مثال:

تحرّ عن المجموعات التالية باستخدام رمز الفترة ومثلها على خط الاعداد.

ف١ = {س: س ∋ ح ، س ≥ ٣}

كفترة ف١ = [٣ ، ∞)

وعلى خط الاعداد

مثال:

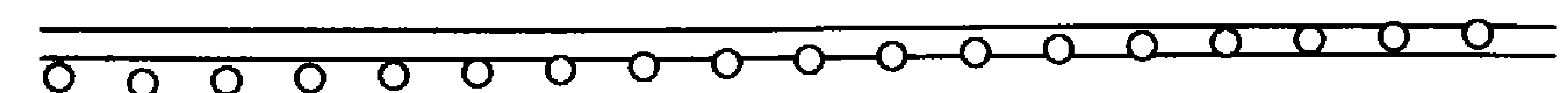
مثّل الفترة [- ١ ، ٤] على خط الاعداد وجد طولها

[- ١ ، ٤] = {س: س ∋ ح ، - ١ ≥ س ≥ ٤}

على خط الاعداد

طول الفترة [- ١ ، ٤] = ٤ - ‾١ = = ٤ + ١ = ٥ وحدات طول

وفي هذا السياق سنناقش بإيجاز اتحاد وتقاطع الفترات كما يلي:

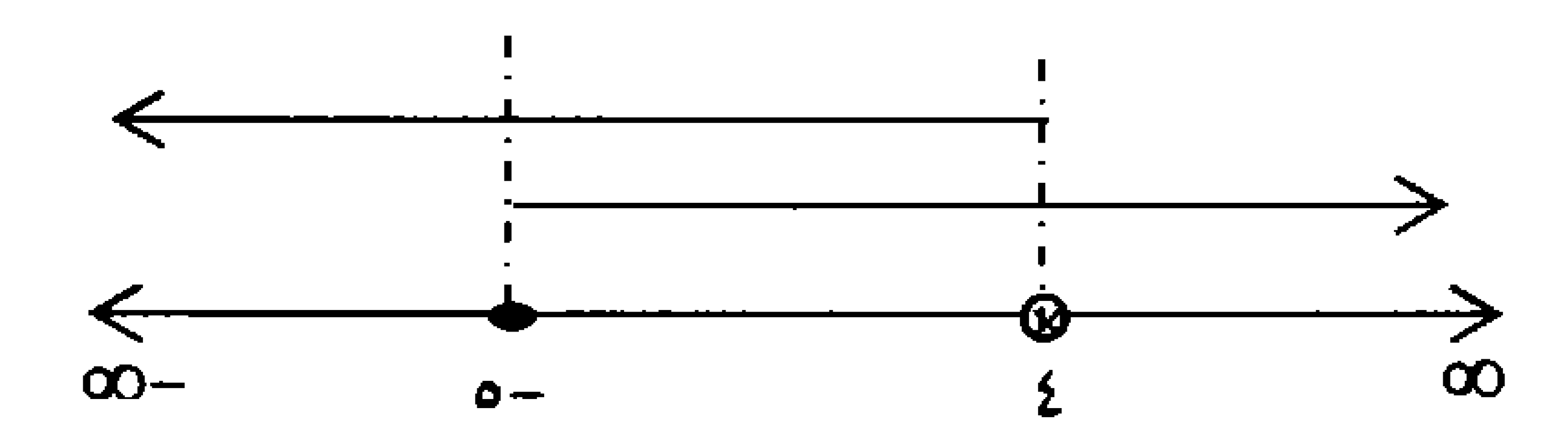


وبما أن الفترات هي مجموعات جزئية من خط الاعداد الحقيقية فهناك اتحاد الفترات وتقاطعها كما في هذه السطور:

مثال:

أوجد [-٥ ، ∞) ∩ (-∞ ، ٤)

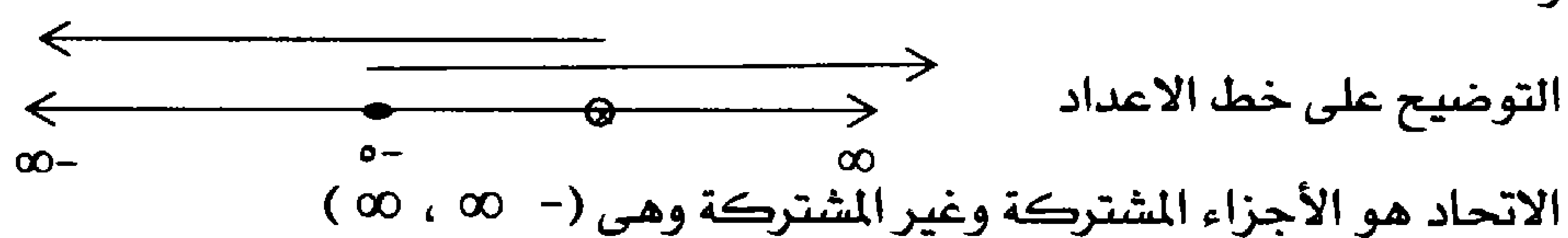
التوضيح على خط الاعداد:



التقاطع هو الجزء المشترك وهو: [-٥ ، ٤)

∴ [-٥ ، ∞) ∩ (-∞ ، ٤) = [-٥ ، ٤)

وكذلك [-٥ ، ∞) ∪ (-∞ ، ٤)



الاتحاد هو الأجزاء المشتركة وغير المشتركة وهي (-∞ ، ∞)

∴ [-٥ ، ∞) ∪ (-∞ ، ٤) = (-∞ ، ∞) = ح

مثال:

أوجد (٣ ، ٥] ∩ (٥ ، ١٢)

التوضيح على خط الاعداد

لا يوجد مشترك

∴ (٣ ، ٥] ∩ (٥ ، ١٢) = φ

وكذلك (٣ ، ٥] ∪ (٥ ، ١٢)

وكما على خط الاعداد،.

فإن الاتحاد هي الأجزاء المشتركة وغير المشتركة وهي (٣ ، ١٢)

∴ (٣ ، ٥] ∪ (٥ ، ١٢) = (٣ ، ١٢) وهكذا..

(١- ١٧) أمثلة محلولة على المجموعات والأعداد

مثال (١):

اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من العدد ٧

جواب:

يمكن كتابة المجموعة المذكورة بصورتين:

الأولى: س = {١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥، ٦} طريقة القائمة

الثانية: س = {ص: ص عدد صحيح موجب أصغر من ٧} طريقة الوصف

مثال (٢):

اذا كانت س = {٥ ، ٦ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٦}

أي من العلاقات التالية بين المجموعتين س ، ص هي الصواب؟

(i) س ⊃ ص (ii) ص ⊃ س (iii) س = ص

الجواب:

الثالثة س= ص كون العناصر في المجموعتين س، ص نفسها ولا تختلف إلا بالترتيب

مثال (٣):

اكتب مجموعة مضاعفات العدد ٥

جواب:

م = {٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ...}

أو م = {س: س ∋ ٥ ص ، ص عدد صحيح موجب}

مثال (٤):

بيّن الخطأ من الصواب فيما يلي:

(i) صفر $\ni \phi$ ⟵ خطأ لأن ϕ المجموعة الخالية لا تحوي عناصر على الاطلاق

(ii) صفر $\not\ni$ { } ⟵ صواب لأن { } المجموعة الخالية لا تحوي عناصر على الاطلاق

مثال (٥):

اكتب مجموعة المجموعات الجزئية (مجموعة القوة) للمجموعة س = {أ ، ب}

بما أن عددها = $٢^٢$ = ٤

فهي ص = { ϕ ، { أ }، { ب} ، {أ ، ب}.

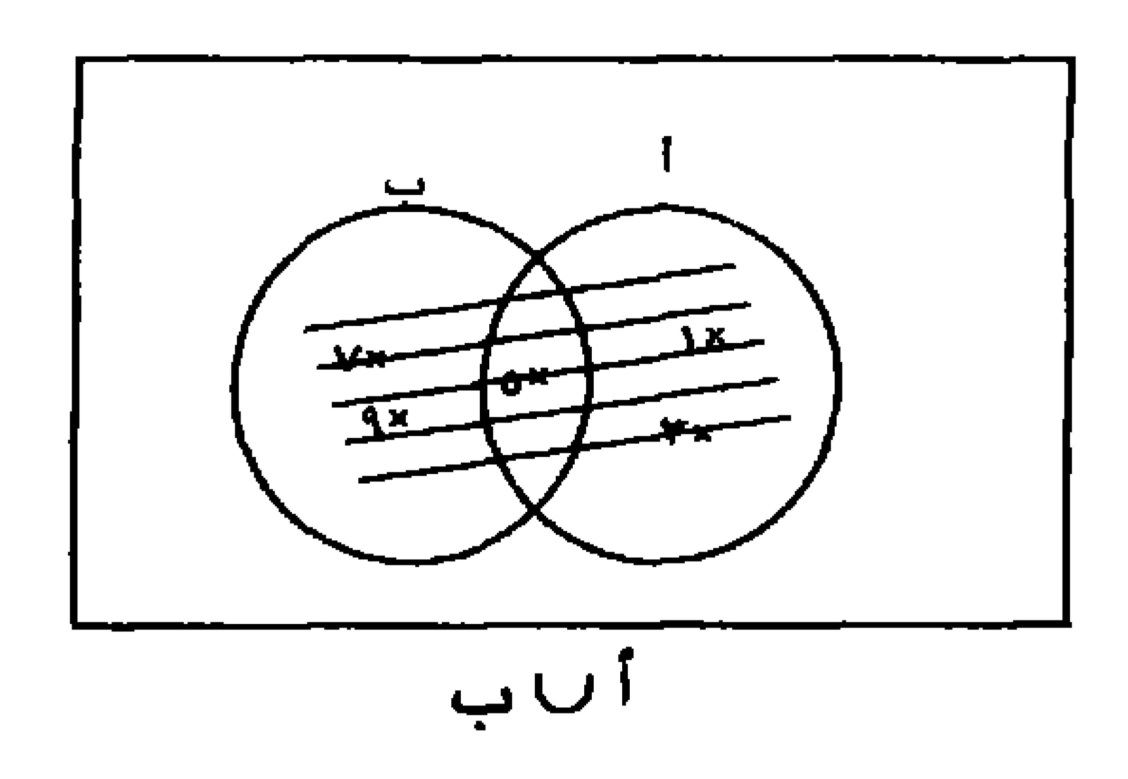
مثال (٦):

اذا كانت أ + {١ ، ٢ ، ٥} ، ب = {٥ ، ٧ ، ٩}

اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها ومثلها بمخططات فن أيضاً:

(i) أ $\cup$ ب = {١ ، ٢ ، ٥} $\cup$ {٥ ، ٧ ، ٩} = {١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

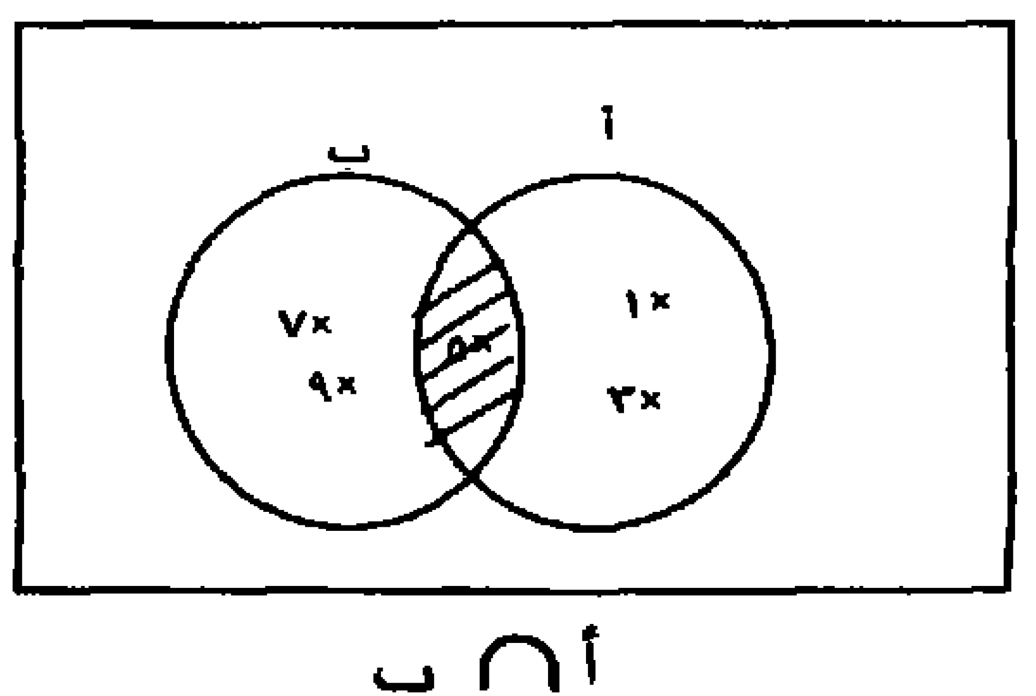
"الاتحاد"



أ $\cup$ ب

(ii) أ $\cap$ ب = {١ ، ٢ ، ٥} $\cap$ {٥ ، ٧ ، ٩} : { ٥ }

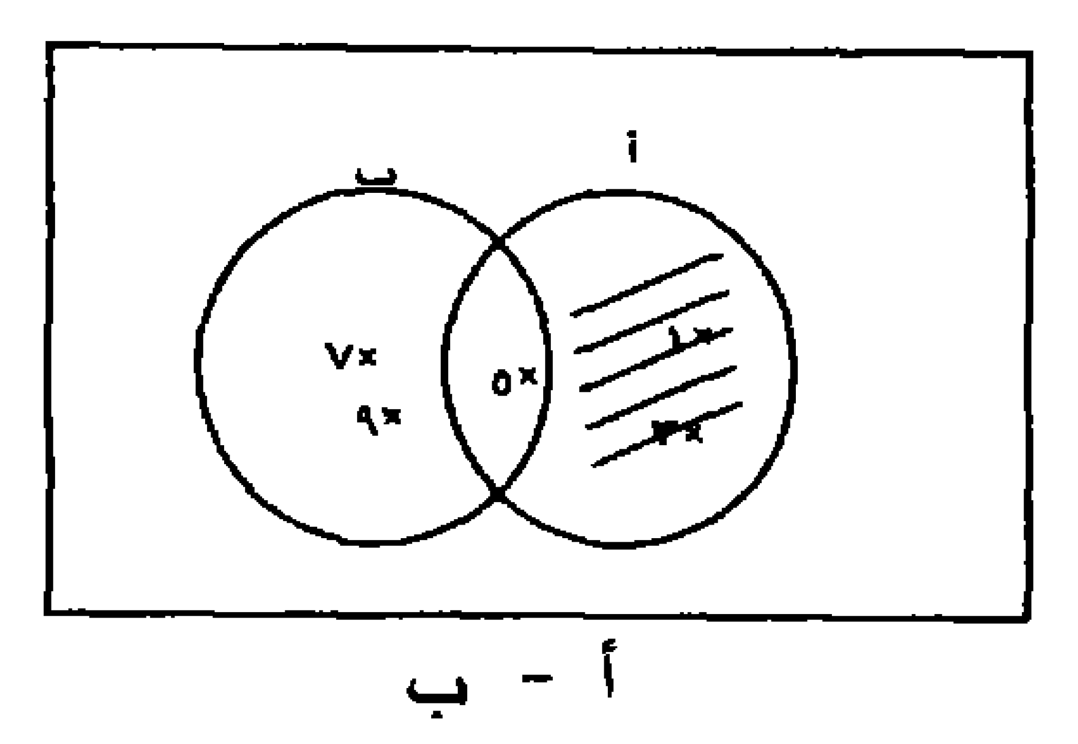
"تقاطع"



أ $\cap$ ب

(iii) أ – ب = {١ ، ٣ ، ٥} – {٥ ، ٧ ، ٩} = {١ ، ٣}

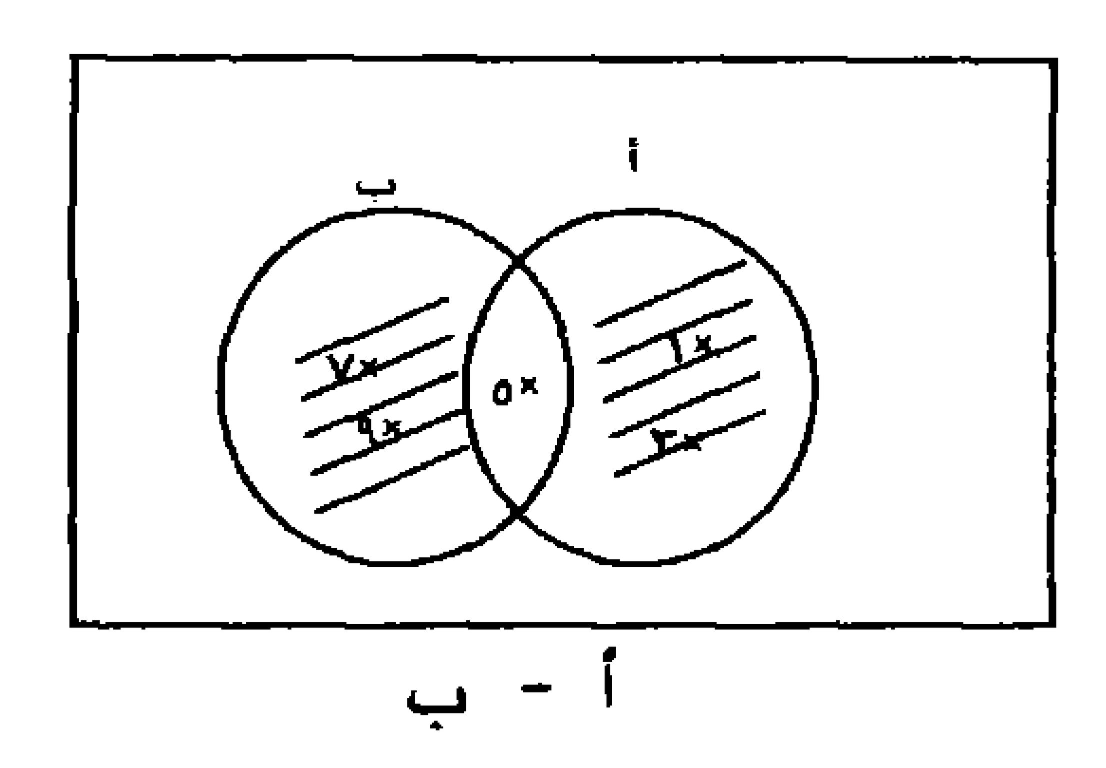
"الفرق"



أ - ب

(iv) أ Δ ب = (أ – ب) (ب – أ)

"الفرق التناظري"



أ - ب

= {١ ، ٣} {٧ ، ٩}

= {١ ، ٣ ، ٧ ، ٩}

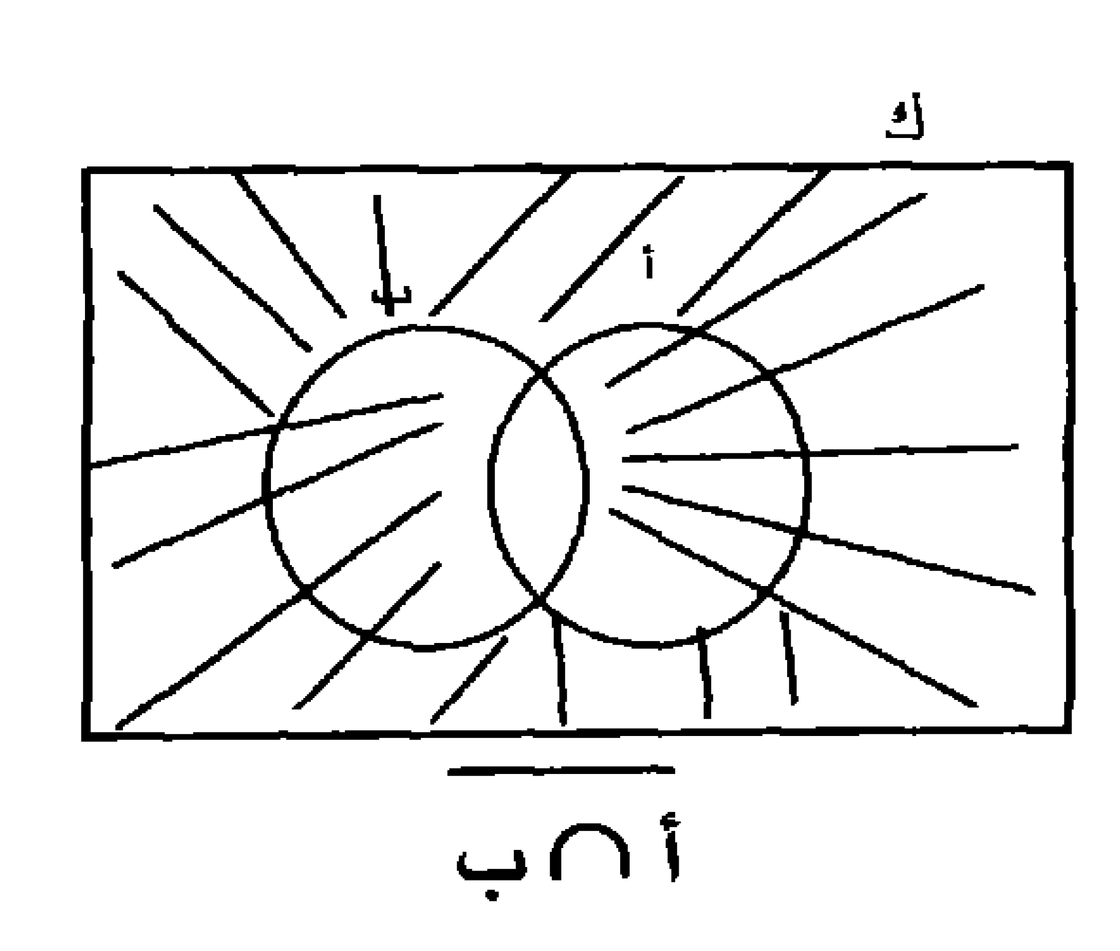
مثال (٧):

في الشكل التالي

ظلل (i) $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$

(ii) $\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$

الجواب:



$\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$

$\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$

كون $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ = ك – (أ ∪ ب)

كون $\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$ = ك – (أ ∩ ب)

مثال (٨):

اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥} ، ع = {١ ، ٢ ، ٤}

بين أن:

(i) (س ∪ ص) ∪ ع = س ∪ (ص ∪ ع) **الخاصية التحقيقية للاتحاد**

(ii) س ∩ (ص ∩ ع) (س ∩ ص) ∩ ع **الخاصية التحقيقية للتقاطع**

(iii) س ∪ (ص ∩ ع) = (س ∪ ص) ∩ (س ∪ع) **الخاصية التوزيعية للاتحاد على التقاطع.**

دونك البيان بشيء من الايجاز:

(i) الطرف الأيمن = ({١ ، ٢، ٣}∪{١ ، ٣ ، ٥}) ∪ {١ ، ٢ ، ٤}

= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥}∪{١ ، ٢، ٤} = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

الطرف الأيسر = {١ ، ٢ ، ٣} ∪ ({١ ، ٣ ، ٥} ∪ {١ ، ٢ ، ٤})

= {١ ، ٢ ، ٣} ∪ {١ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤}

= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} = الطرف الأيمن.

(ii) الطرف الأيمن = {١ ، ٢، ٣}∩ ({١ ، ٣ ، ٥} ∩ {١ ، ٢ ، ٤})

= {١ ، ٢ ، ٣}∩{١} = {١}

الطرف الأيسر = ({١ ، ٢ ، ٣} ∩ {١ ، ٣ ، ٥}) ∩ {١، ٢، ٤}

= {١ ، ٣} ∩ {١ ، ٢، ٤} = {١} = الطرف الأيمن.

(iii) الطرف الأيمن = {١ ، ٢، ٣} ∪ ({١ ، ٣ ، ٥} ∩ {١ ، ٢ ، ٤})

= {١ ، ٢ ، ٣}∪ {١} = {١ ، ٢ ، ٣}

الطرف الأيسر = ({٣،٢،١}∪{٥،٣،١}) ∩ ({٣،٢،١}∪{١ ،٢ ، ٤})

= {٣،٢،١، ٥} ∩ {٤،٣،٢،١} = {١، ٢، ٣}

= الطرف الأيمن.

مثال (٩):

اذا كانت س = {١ ،٢} ، ص = {١ ، ٣} أوجد:

س × س ، س × ص ، ص × ص

س × س = {١ ، ٢} × {١ ، ٢} = {(١ ، ١) ، (١، ٢)، (٢ ، ١) ، (٢، ٢)}

س × ص = {١ ،٢ } × {١ ، ٣} = {(١ ،١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣)}

ص × ص= {١ ، ٣} × {١ ، ٣} = { (١ ،١) ، (١ ، ٣) ، (٣ ،١) ، (٣ ، ٣)}

مثال (١٠):

اذا كانت س = { عمان ، بيروت ، بغداد}

ص = { لبنان ، العراق، الاردن ، مصر}

اكتب العلاقة من س الى ص حيث ترتبط كل عاصمة من س بدولتها من ص على شكل أزواج مرتبة.

الجواب:

ع = { (عمان ، الأردن) ، (بيروت ، لبنان) ، (بغداد ، مصر)}

مجالها المجموعة { عمان ، بيروت ، بغداد}

مداها المجموعة {، الأردن ، لبنان ، العراق} ⊂ ص

مثال (١١):

اذا كانت أ = {١ / ٢ / ٣ / ٤ / ٥}

اكتب قاعدة كل من العلاقات التالية على المجموعة أ

(i) $ع_١$ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٤)}

(ii) $ع_٢$ = {(١ ، ١)}

(iii) $ع_٣$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤)}

الجواب:

قاعدة $ع_١$ هي ص = س = ١ ، لكل س ، ص ∋ أ

قاعدة $ع_٢$ هي ص = $س^٢$ ، لكل س ، ص ∋ أ

قاعدة $ع_٣$ هي ص = ٢س ، لكل س ،ص ∋ أ

مثال (١٢):

صنف العلاقات التالية على المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٣} اس

انعكاس ، تماثل ، تعدي ، تكافؤ

(i) $ع_١$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٢)} الجواب ، تماثل

(ii) $ع_٢$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٣)} الجواب، تماثل وتعدي

(١ ، ١)

(iii) $ع_٣$ = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٣)} الجواب تكافؤ

مثال (١٣):

اذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦}

أي من العلاقات التالية من س الى ص تمثل اقتراناً:

ع١ = {(١ ، ٢) ، (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٤)} اقتران

كون المسقط الأول لم يكرر.

ع٢ = {(١ ، ٦) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢)} ليس اقتران ، بل علاقة

كون المسقط الأول تكرر.

ع٣ = {(٢ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٦ ، ٥)} اقتران (ثابت).

مثال (١٤):

ما قيمة كل مما يلي في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، + ، ٠)

(i) (-٥) (٤) (ii) (-٥) + (٤)

(iii) (-٥) − (+٤)

الجواب:

(- ٥) (٤) = - ٢٠ لاختلاف الاشارتين في المضروب والمضروب فيه.

(- ٥) + (٤) + (- ١)

استعانة بوعاء الاشارات

(- ٥) − (+٤) = (- ٥) + (- ٤)

= (- ٩)

استعانة بوعاء الاشارات

مثال (١٥):

ضع واحدة من الاشارتين < ، > في الدائرة الواقعة بين كل من العددين التاليين:

(i) |- ٧| ◯ |- ٨|

(ii) | ٧ | ◯ |- ٨|

(iii) | ٧ | ◯ (- ٨)

الجواب:

|- ٧| < |- ٨| كون ٧ < ٨ بعد ازالة القيمة المطلقة

٧ < ٨ بعد ازالة القيمة المطلقة

٧ > - ٨ بعد ازالة القيمة المطلقة

مثال (١٧):

حلل الأعداد التالية الى عواملها الأولية وضع الجواب بصورة أسية.

(i) ١٢٨ الجواب $٢^{٧}$

١٢٨	٢
٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

(ii) ١٠٨ الجواب $٢^{٢} \times ٣^{٣}$

١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

(iii) ٢٥ = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٥}$

٢٥٠	٢
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

مثال (١٧):

أوجد القاسم المشترك الأكبر "ق . م. أ"

"المضاعف المشترك الأصغر" م . م . أ لكل من:

(i) ٧٢ ، ٢١٦

ق . م . أ = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ = ٧٢

م . م . أ = $٢^٣ \times ٣^٢ \times ٣$

= (٨) (٩) (٣)

= ٢١٦

٧٢	٢١٦	٢
٣٦	١٠٨	٢
١٨	٥٤	٢
٩	٢٧	٣
٣	٩	٣
١	٣	

(ii) ٣٥ ، ٤٥ ، ٦٥

ق . م . أ = ٥

م . م . أ = (٥) (١٣) (٩) (٧) = ٤٠٩٥

٣٥	٤٥	٦٥	٥
١٧	٩	١٣	

(iii) ١٠ ، ٥٧

ق . م . أ = ١

م . م . أ = (١) (٥٧) (١٠)

= ٥٧٠

١٠	٥٧	١
١٠	٥٧	

مثال (١٨):

أوجد $\sqrt{٠,٠٠٦٤}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[٣]{-٥١٢}$

الحل:

$$\sqrt{٠,٠٠٦٤} = \sqrt{\frac{٦٤}{١٠٠٠٠}} = \frac{\sqrt{٦٤}}{\sqrt{١٠٠٠٠}} = \frac{٨}{١٠٠}$$

$$= ٠,٠٨$$

$$\sqrt[٣]{\frac{\overset{١١}{\cancel{١٢٨}}}{\underset{١٢٥}{\cancel{٢٥٠}}}} = \sqrt[٣]{\frac{٦٤}{١٢٥}} = \frac{\sqrt[٣]{٦٤}}{\sqrt[٣]{١٢٥}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\sqrt[٣]{-٥١٢} = -\sqrt[٣]{٢١٥} = -(٢ \times ٢ \times ٢)$$

$$= -٨$$

٥١٢	٢	
٢٥٦	٢	٢
١٢٨	٢	
٦٤	٢	
٣٢	٢	٢
١٦	٢	
٨	٢	
٤	٢	٢
٢	٢	
١		

مثال (١٩):

مثل الأعداد النسبية التالية تمثيلاً عشرياً

(i) $\frac{٢٥}{٤}$ (ii) $\frac{٥}{٦}$ (iii) $\frac{١}{٩}$

الحل:

يتم التمثيل العشري للأعداد النسبية بواسطة قسمة بسط الكسر على مقامه باعتبار العدد النسبي ككسر عادي هكذا:

$\frac{٢٥}{٤} = ٦,٢٥$

$$\begin{array}{r|l} ٦,٢٥ & \\ \hline ٢٥ & ٤ \\ ٢٤ & \\ \hline ١٠ & \\ ٨ & \\ \hline ٢٠ & \\ ٢٠ & \\ \hline ٠٠ & \end{array}$$

$\frac{٥}{٦} = ٠.\overline{٣}$ حيث $\overline{٣}$ دوري

$$\begin{array}{r|l} ٠,٨٣٣٣ & \\ \hline ٥٠ & ٦ \\ ٤٨ & \\ \hline ٢٠ & \\ ١٨ & \\ \hline ٢٠ & \\ ١٨ & \\ \hline ٢٠ & \end{array}$$

$\frac{٥}{٦} = ٠.\overline{١}$ حيث $\overline{١}$ دوري

$$\begin{array}{r|l} ٠,١١١ & \\ \hline ١٠ & ٩ \\ ٩ & \\ \hline ١٠ & \\ ٩ & \\ \hline ١٠ & \end{array}$$

مثال (٢٠):

اكتب الكسور العشرية التالية $٢,٤$ ، $٠.\overline{٥}$ ، $٠.\overline{٢٣}$

على صورة $\frac{أ}{ب}$

الحل:

$٢,٤ = ٢ \frac{٤}{١٠} = \frac{\not{٢٤}^{\,١٢}}{\not{١٠}_{\,٥}} = \frac{١٢}{٥}$

$0.\overline{5}$: نفرض أن ١٠ (س = ٠,٥٥٥٠٠٠) كون منزله تدور

١٠س = ٥,٥٥٠٠٠

لكن ١س = ٠,٥٥٥٠٠٠ طرفاً

٩س = ٥ ⟵ س = $\frac{5}{9}$

∴ $0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{23}$

١٠٠ (س = ٠,٢٣٢٣٢٣٠٠٠) كون منزلتان تدوران

١٠٠س = ٢٣,٢٣٢٣٠٠٠

لكن ١س = ٠,٢٣٢٣٢٣٠٠٠ طرفاً

٩٩س = ٢٣ ⟵ س = $\frac{23}{99}$

∴ $0.\overline{23} = \frac{23}{99}$

مثال (٢١):

أوجد $\sqrt{23}$ ، $\sqrt[3]{58}$ لأقرب منزلة عشرية

بما أن ١٦ > ٢٣ > ٢٥ منحصرة بين مربعين متتالين

∴ $\sqrt{16} > \sqrt{23} > \sqrt{25}$

أي أن ٤ > $\sqrt{23}$ > ٥

بما أن العدد ٢٣ أقرب الى العدد ٢٥

الجذور	٤	$\sqrt{23}$	٥
الاعداد	١٦	٢٣	٢٥

فإن $\sqrt{23}$ أقرب الى العدد ٥

في المنتصف $\frac{4+5}{2} = 4.5$

$\sqrt{٢٣} \in \{٤,٦ ، ٤,٧ ، ٤,٨ ، ٤,٩\}$

٤,٥ ٤,٦ ٤,٧ ٤,٨ ٤,٩ ٥

والجواب الأقرب الى الحقيقة من الآلة الحاسبة هو:

٤,٧ لأقرب منزلة عشرية

لاحظ أن $٤,٧ \in \{٤,٦ ، ٤,٧ ، ٤,٨ ، ٤,٩\}$

مثال (٢٢):

ما قيمة $\sqrt{٨} + \sqrt{٢}$

$\sqrt{١٨} - \sqrt{٨}$

$\sqrt{٢٨} \times \sqrt{٧}$

$\sqrt{٢٨} \div \sqrt{٧}$ بأبسط صورة

نبسط كل من:

$$\sqrt{٨} + \sqrt{٢} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢} + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢} + ١\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$$

وكذلك $\sqrt{١٨} - \sqrt{٨} = \sqrt{٢ \times ٣ \times ٣} - \sqrt{٢ \times ٢ \times ٢} = ٣\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} = ١\sqrt{٢}$

كون الجذور (الاعداد غير النسبية المتشابهة تجمع وتطرح وغير المتشابهة ✗)

والجذور المتشابهة ما كان دليل جذرها متساوٍ وما بداخله ايضاً متساوٍ.

لكن $\sqrt{٢٨} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٢ \times ٢ \times ٧} \times \sqrt{٧}$

$= \sqrt{٢ \times ٢ \times ٧ \times ٧}$ كجذر واحد

$= ٢ \times ٧ = ١٤$

وكذلك $\sqrt{٢٨} \div \sqrt{٧} = \dfrac{\sqrt{٢٨}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\dfrac{٢٨}{٧}} = \sqrt{٤} = ٢$

مثال (٢٣):

انطق المقام كل من $\frac{١٠}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{١٠}{\sqrt{٥}-١}$

$$\frac{١٠}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠\sqrt{٥}}{٥} = ٢\sqrt{٥}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٥}-١} \times \frac{\sqrt{٥}+١}{\sqrt{٥}+١} = \frac{\sqrt{٥}+١}{٥-١} = \frac{\sqrt{٥}+١}{٤} = \frac{\sqrt{٥}}{٤} + \frac{١}{٤}$$

مثال (٢٤):

ما قيمة $(\sqrt{٧} - \sqrt{٣})(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})$

باستخدام قانون التوزيع أو الضرب العمودي: فإن القيمة =

$$\sqrt{٧}(\sqrt{٧} + \sqrt{٣}) - \sqrt{٣}(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})$$

$$= ٧ + \sqrt{٢١} - \sqrt{٢١} - ٣ = ٧ - ٣ = ٤$$

مثال (٢٥):

عبّر عن المجموعات التالية باستخدام رمز الفترة، ومثلها على خط الاعداد

$ف_١ = \{س : س \in ، س > ٥\}$

$ف_٢ = \{ص : ص \in ح \quad -٢ < س \leq ٢\}$

الحل:

$(٥ ، \infty)$ على شكل فترة

$(-٢ ، ٢]$ على شكل فترة

(١- ١٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

"المجموعات والاعداد"

(١) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها

(i) مجموعة فصول السنة.

(ii) مجموعة حروف كلمة مربع.

(iii) مجموعة الدول العربية.

(iv) مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين ٤ ، ١٤

(v) مجموعة أرقام العدد ٧٧٧٦٦٥

(٢) اكتب المجموعات التالية بذكر صفة تميزها عن غيرها بكل وضوح.

(i) مجموعة أشهر السنة الميلادية

(ii) مجموعة عواصم الدول الأوروبية.

(iii) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين العددين ٥ ، ٢٥

(iv) مجموعة ألوان العلم الأردني.

(v) مجموعة الجامعات الأردنية الحكومية.

(٣) ما عدد عناصر كل من المجموعات التالية:

(i) = { } ، (ii) أ = { ٠ } ، (iii) ب = { ع : ع كوكب سيار}

(iv) جـ = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٠٠٠} ، (v) مجموعة أحرف كلمة السلام.

(٤) اذا كانت أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

ب = {س : س ∋ ط ، س ≥ ٨}

فأي من العبارات التالية صواب:

(i) أ = ب (ii) أ ⊃ ب (iii) ب ⊃ أ (iv) أ ∋ ب

(٥) اذا كانت س = {أ ، ب ، ٥} فاملأ المربعات التالية بواحد من الرموز التالية:

∋ ، ⊃ ، = ٠٠

(i) أ □ س (iv) {ب} □ س

(ii) {أ} □ س (v) جـ □ س

(iii) φ □ س (vi) {أ ، ب ، جـ} □ س

(٦) اذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

أ = {١ ، ٢ ، ٣}

ب = {٢ ، ٤ ، ٥}

اكتب المجموعات التالية وفصلها بأشكال فن:

(i) أ ∪ ب (ii) أ ∩ ب (iii) ب − أ

(iv) أ − ب (v) أَ ∨ بَ (vi) $\overline{\text{أ ∪ ب}}$

(vii) أ Δ ب

(٧) اذكر الوضع المعاكس لكل من:

(i) ٨ درجات سلسيوسية تحت الصفر (ii) دائن (iii) خسارة

(iv) زيادة ٧ كغ (v) $\frac{١}{٢}$

(٨) أوجد الجذر التربيعي للعدد ٧٠٥٦ {٨٤}

(٩) أوجد الجذر التكعيبي للعدد ٥١٢ ، {٨}

(١٠) ما ناتج:

(i) $\frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦}$ { $\frac{١٩}{١٢}$ ، $\frac{١-}{١٢}$ ، $\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٩}{١٠}$ }

(ii) $\frac{٣}{٤} - \frac{٥}{٦}$

(ii) $\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٦}$

(iii) $\frac{٣}{٤} \div \frac{٥}{٦}$

(١١) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ،

ع = {س : س ∋ ص ، - ٥ ≤ س ≤ ١}

أوجد (i) س ــ ص (ii) ص ــ س (ii) س⁻ ع (iv) ص⁻ ع

ومثل كلاً منها بأشكال فن

{١ ، ٣} ، {٦ ، ٨} ، {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

(١٢) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} فما نوع كل من العلاقات التالية من حيث الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ:

(١) ع$_{1}$ = { (٣ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) } {تماثل ، تكافؤ ، تعدي}

(٢) ع$_{2}$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤)}

(٣) ع$_{3}$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (١ ، ١)}

(١٣) اكتب كلاً من المجموعات التالية بطريقة القائمة (ذكر جميع عناصرها):

(i) الأعداد الطبيعية الأقل من العدد ٧

(ii) الأعداد الكلية الأقل من العدد ٧

(iii) الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين الصحيحين - ٧ ، ٧

(iv) الأعداد الطبيعية الأولية الأقل من ١٠

(١٤) اذا كانت س = {١ ، ٢، ٣ ، ٤} ، ص مجموعة أرقام العدد ٠٥٢١٧٣٣٣

ضع أحد الرمزين ∋ ، ∌ في المربعات التالية لتصبح العبارات صائبة:

(i) ١ ☐ س ، ١ ☐ ص

(ii) ٦ ☐ س ، ٦ ☐ ص

(iii) ٥ ☐ س ، ٥ ☐ ص

(iv) ٧ ☐ س ، ٧ ☐ ص

(١٥) ضع واحد من الرموز $<$ ، $>$ ، $=$ في الدائرة فيما يلي لتصبح كل من العبارات صواب:

(i) ٣ ◯ |− ٣| (ii) − |− ٣| ◯ |

(iii) − ٤ ◯ − ١   (iv) − ٩ ◯ |− $\frac{١}{٩}$|

(١٦) أجب بنعم أو لا لتصبح العبارة التالية صواب:

(i) {∋{٥ ٥

(ii) {٤ ، ٢} ∌٣

(iii) {∋{٢ {٢}

(iv) {∋{٢ ٣

(v) ∋٢ {٢}

(١٧) استعن بمخطط فن التالي:

للاجابة عن الأسئلة التالية:

(i) اكتب المجموعة أ ∩ ب بذكر جميع عناصرها

(ii) اكتب المجموعة $\overline{أ \cup ب}$ بذكر جميع عناصرها

(iii) اكتب المجموعة أ − ب بذكر جميع عناصرها

(١٨) لتكن س = {٤ ، ٧ ، ٩} ، ص = {٥ ، ٦ ، ١٢}

كون مخططاً سهمياً يمثل علاقة (أكبر من) من المجموعة س الى المجموعة ص

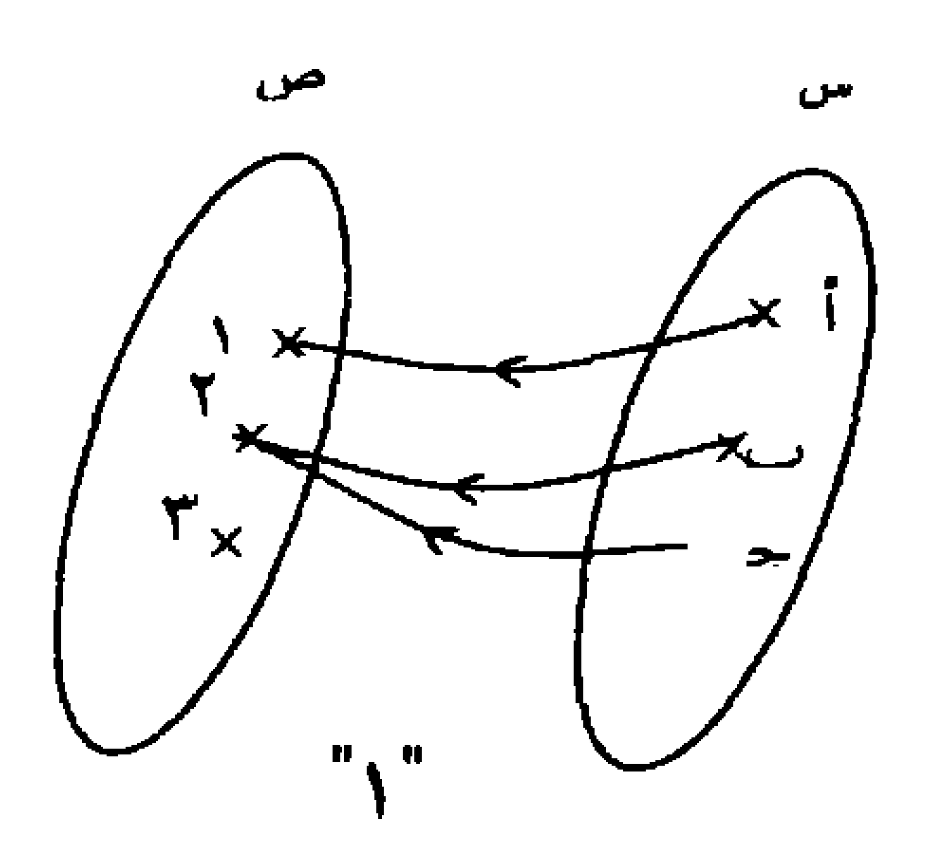
(١٩) اذا كانت س مجموعة من الأنهار ، ص مجموعة الأقطار ..؟؟

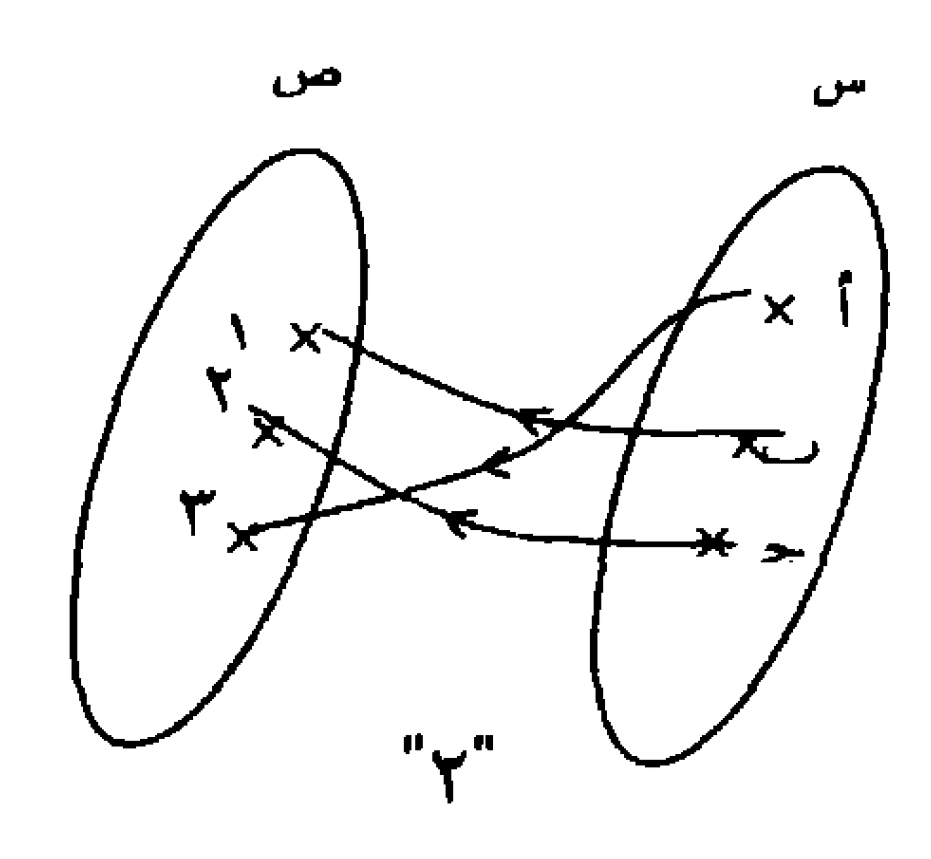
س = {نهر النيل ، نهر الفرات ، نهر الأردن}

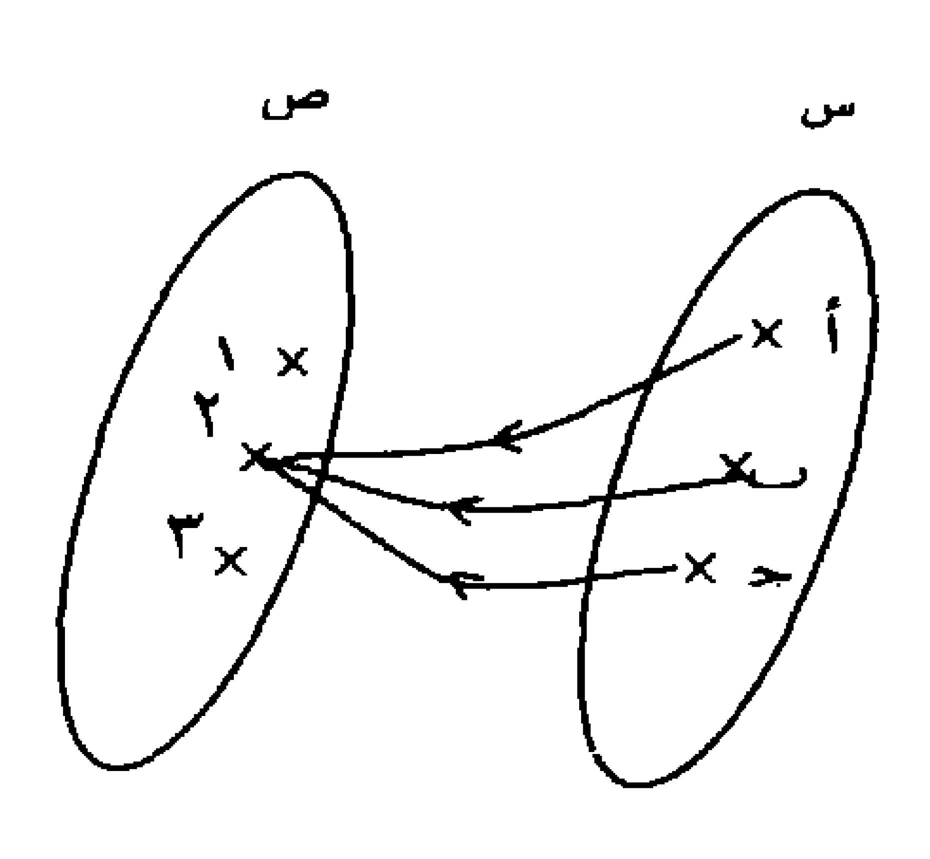
ص = {العراق ، الأردن ، السودان ، مصر ، سوريا}

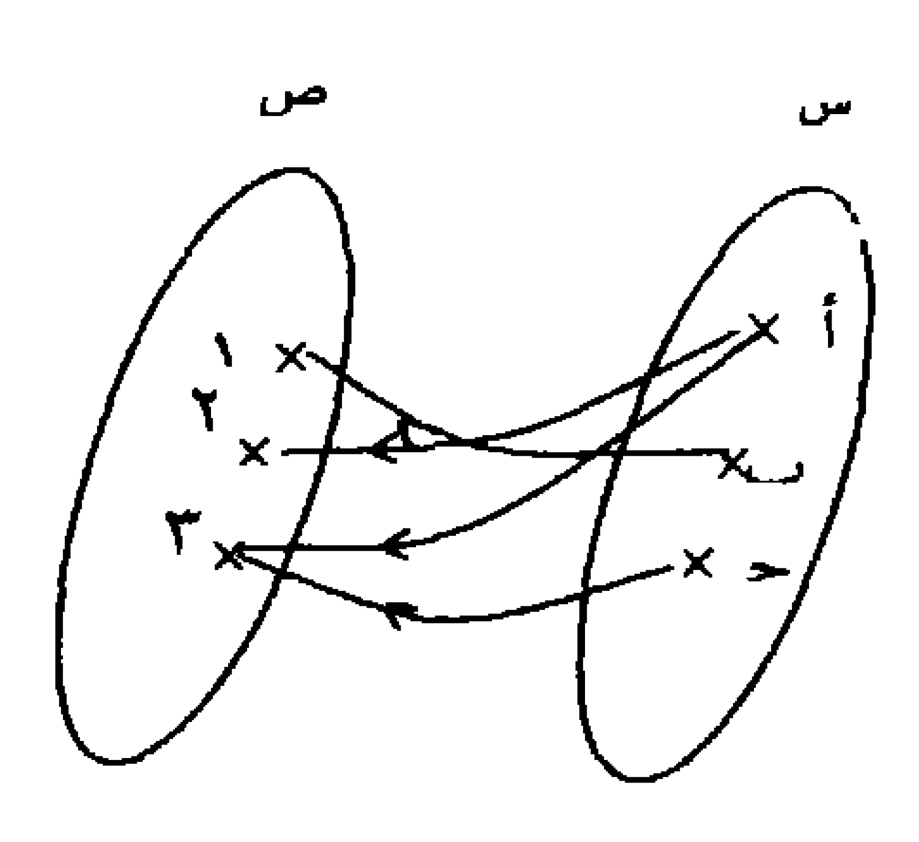
كون مخططاً سهمياً يمثل علاقة يوجد في من المجموعة س الى المجموعة ص.

(٢٠) أي المخططات السهمية الآتية يمثل اقتراناً من نوع واحد لواحد:









"٤"　　"٣"

(٢١) (i) ما قيمة كل من:

(− ٥)^٢ ، (٦)^٣ ، (٠)^٧

(ii) اكتب الاعداد التالية بصورة آسية للأساس ٢:

٦٤ ، ٥١٢

(٢٢) حلل كلاً من الأعداد الأسية الى عواملها الأولية:

وضع الجواب بصورة أسية:

١٤٠٠ ، ٧٢٩ ، ٩٣٥

(٢٣) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٥ ، ١٠} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ١٥}

وكانت ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠}

اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها واستعن بأشكال فن:

سَ ، صَ ، سَ ∪ صَ ، سَ ∧ صَ ،س ∪ ص ،س ∧ ص ، س- ص ، ص- س ، س Δ ص

(٢٤) في أحد معاهد اللغات وجد أن من بين ١٥٠ طالباً يدرسون بالمعهد:

٣٥ طالباً يدرسون اللغة الانجليزية

٣٠ طالب يدرسون اللغة الفرنسية

١٥ طالب يدرسون اللغتين الانجليزية والفرنسية

١٠ طلاب يدرسون اللغتين الانجليزية والالمانية

٤٠ طالب يدرسون اللغة الالمانية

٧ طلاب يدرسون اللغتين الالمانية والفرنسية

٤ طلاب يدرسون اللغات الثلاث الانجليزية والفرنسية والالمانية

وضح ذلك بمخطط فن ثم أوجد عدد الطلاب الذين:

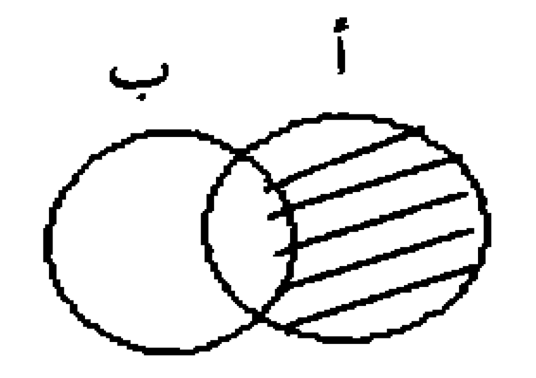
(i) لا يدرسون أي لغة (ii) يدرسون الانجليزية فقط

(iii) يدرسون لغة واحدة فقط (الانجليزية أم الفرنسية أو الألمانية)

(iv) الذين لا يدرسون الفرنسية والالمانية

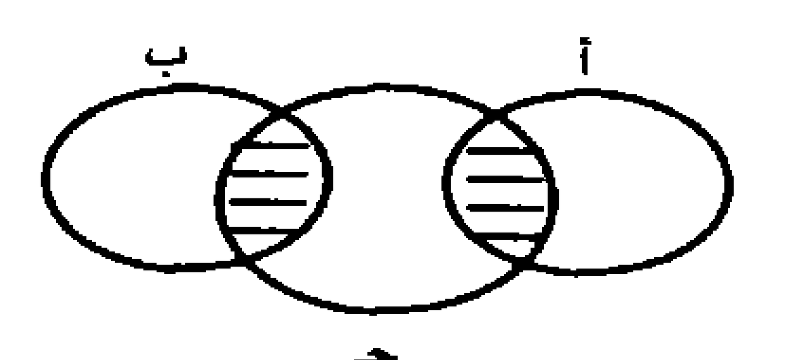
{٧٣ ، ١٤ ، ٥٣ ، ٨٧}

(٢٥) اكتب المجموعات التي تمثلها الأجزاء المظللة بمخططات فن التالية:

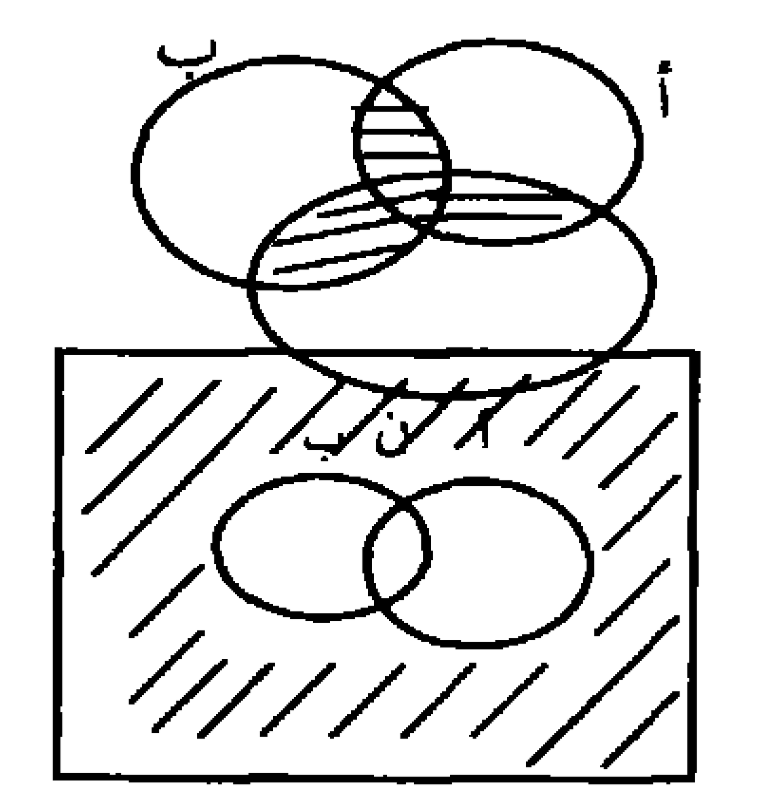




الجزء المظلل يمثل المجموعة:



الأجزاء المظللة تمثل المجموعة:



الأجزاء المظللة تمثل المجموعة

الأجزاء المظللة تمثل المجموعة:

(٢٦) اذا كان عدد عناصر المجموعة س = ٥

وكان عدد عناصر المجموعة ص = ٧

فما عدد عناصر كل من المجموعات التالية وبالأزواج المرتبة:

س × ص ، ص × س ، س × س ، ص × ص

(٢٧) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} فما نوع كل من العلاقات (انعكاس، تماثل، تعدي، تكافؤ) التالية:

$ع_١$ = { (١، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

$ع_٢$ = { (١، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٢)}

(٢٨) ضع كلاً من الاعداد النسبية التالية في أبسط صورة ممكنة:

$\frac{٧٧}{١٢١}$ ، $\frac{-١٤}{٩١}$ ، $\frac{-٤٨}{-٦٠}$ ، $\frac{١٠٥}{٣٧٥}$ ، $\frac{١٢}{٨}$ ، $\frac{٨٧}{٦٥}$

(٢٩) أوجد حاصل ضرب ما يلي:

(٣ + √٥)(٣ - √٥) =

(√٧٠ - √٥ √٥ - √٧) =

(٣٠) أوجد الناتج فيما يلي مستعيناً بوعاء الاشارات:

(١) ٥ + (-٥)

(٢) (-٥) + (-٥)

(٣) ٥ − (-٥)

(٤) (-٥) − (-٥)

(٣١) صنّف كلاً من الفترات التالية الى: مغلق ، نصف مغلقة ، مفتوحة

(١) [-٤ ، ٥]

(٢) (-٢ ، -١)

(٣) (-∞ ، ٣)

(٤) [$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

(٥) [٠ ، ∞)

(٦) (٥ ، ٧)

(٧) (-∞ ، -١]

ارشاد: ± ∞ لا تؤثران في نوع الفترة وكأنهما غير موجودان.

(٣٢) ضع أحد الرموز > ، < ، = في كل مربع من المربعات التالية لتصبح العبارات صواب:

(١) $\frac{٤}{٩}$ □ $\frac{٧}{١٧}$

(٢) - $\frac{١}{٧}$ □ - ٠,١٤٢٨٥٧

(٣) $(\pi)^{٢}$ □ ٩,٨ حيث π = ٣,١٤

(٣٣) ما قيمة كل من:

- $|-٣|$ ، $(|-\sqrt{٢}|)^{٢}$ ، $|-٥| + |٥|$ ، $|-٥| - |٥|$

(٣٤) أوجد ع . م . أ ، م . م. أ للأعداد:

٢٧٥٦ ، ٤٥ {٣ ، ٢٧٠}

(٣٥) اذا كان عدد عناصر ك = ٢٩

وكان عدد عناصر أ = ١٥

وعدد عناصر ب = ١٢

وعدد عناصر ($\bar{أ} \cap \bar{ب}$) = ٤

فما عدد عناصر المجموعة (أ ∩ ب) {٢}

ارشاد : استعن بمخططات فن

(٣٦) ضع احدى الاشارتين > ، < بدلاً من النقط فيما يلي:

$\frac{١}{٢}$ ... $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ... $-\frac{١}{٣}$

$-\frac{١}{٤}$ ... $\frac{١}{٨}$ ، ٠.٣ ... $٠.\bar{٣}$

(٣٧) اذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩}

أ = {س : س عدد أولي أقل من ١٠}

ب = {ص : ص عدد زوجي أقل من ١٠}

اكتب المجموعة أ ∩ ب بذكر جميع عناصرها {٢}

(٣٨) اذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

س = {٣ ، ٥}

ص = {٢ ، ٤}

اكتب المجموعة $\overline{(س \cup ص)} - \overline{(س \cap ص)}$ بذكر جميع عناصرها.

(٣٩) أجب بنعم أو لا :

(i) مجموع عددين صحيحين زوجيين دائماً عدد زوجي.

(ii) مجموع عددين صحيحين فرديين دائماً عدد فردي.

(iii) مجموع عددين صحيحين أحدهما فردي والآخر زوجي دائماً عدد فردي.

(iv) مجموع أي عدد صحيح مع نفسه دائماً عدد زوجي.

(v) الفرق بين أي عددين صحيحين دائماً عدد زوجي.

(vi) مربع أي عدد صحيح فردي هو عدد صحيح زوجي.

(vii) مربع أي عدد صحيح زوجي هو عدد صحيح زوجي.

(٤٠) اكتب العدد $\sqrt{١٣}$ لأقرب منزلتين عشريتين.

(٤١) اذا كانت ك = {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩}

س = {١ ، ٢ ، ٥ ، ٩}

ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨}

ع = {٢ ، ٤ ، ٧ ، ٨}

عيّن المجموعة $(س \Delta ص) \Delta ع$ بذكر جميع عناصرها.

(٤٢) أوجد ع . م . أ ، م . م . أ للأعداد:

١٢٦٠ ، ١٣٥٠ ، ٩٠٠٠

(٤٣) اكتب خمسة عناصر (أزواج مرتبة) تنتمي الى المجموعة التالية:

أ = {(س ، ص) : $س^٢ - ص^٢$ = ك حيث ك عدد أولي}

ارشاد: أكمل المجموعة { (٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، ...

(٤٤) ما قيمة $\frac{٧ + ٣\sqrt{٥}}{٧ - ٣\sqrt{٥}} + \frac{٧ - ٣\sqrt{٥}}{٧ + ٣\sqrt{٥}}$ كعدد طبيعي {٤٧}

(٤٥) بسّط ما يلي:

$$\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٤٨}$$

(٤٦) انطق المقام فيما يلي:

$$\frac{ب^٢}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢} + أ} \qquad \left\{ \frac{\sqrt{أ^٢ + ب^٢} - أ}{١} \right\}$$

(٤٧) حلل العدد ٣٦٠٠ الى عوامله الأولية وعبّر عنه بصورة أسية.

$$\{ ٢^٤ \times ٣^٢ \times ٥^٢ \}$$

(٤٨) اذا كانت ق مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة أ = {١ ، ٢ ، ٣}

أي أن ق = {{ } ، {١} ، {٢} ، {٣} ، {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {٢ ، ٣} ، {١ ، ٢ ، ٣}}

فأي من الأنظمة الرياضية التالية (ب ، ∪) ، (ق ، ∩) يشكل زمرة مع التوضيح على شكل جدول؟

(٤٩) اذا كانت أ = {(س ، ص) : ص = س^٢} فأي من الأزواج المرتبة التالية (− ١ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ينتمي الى المجموعة أ

ارشاد: هو زوج مرتب واحد فقط.

(٥٠) حلل العدد ٥٥٤٤ الى عوامله الأولية وضع الجواب بصورة أسية

$$\{ ٢^٣ \times ٣^٢ \times ٧ \times ١١ \}$$

(٥١) أوجد ع. م. أ للأعداد ١٦٦٣٢ ، ٢٨٠٨ ، ٥٤٠

{١٠٨}

(٥٢) مثل الأعداد النسبية التالية تمثيلاً عشرياً:

$\frac{١}{٧}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١٣}{١٥٠}$ { $٠.\overline{٢٨٥٧١٤}$ ، $٠.٨\overline{٣}$ ، $٠.٤٨\overline{٦}$ }

(٥٣) اذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٥}

ص= {٣ ، ٥ ، ٧}

ع = {٤ ، ٥ ، ٧ ، ١١}

ما عدد عناصر كل من المجموعات التالية:

س ∩ ص ، ص ∪ ع ، س − ع ، ص Δ ع

(٥٤) اكتب قاعدة العلاقة ع = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ١٤)}

بدلالة س ، ص {ص = ٣س + ٢}

(٥٥) انطق المقام (اجعله عددا نسبياً)

$$\frac{٢\sqrt{٣} - \sqrt{١٠}}{٢\sqrt{٣} + \sqrt{١٠}}$$

(٥٦) اذا كانت س = {أ ، ب} ، ص = {ϕ ، {أ} ، {ب} ، {أ ، ب}}

فأين الخطأ وأين الصواب فيما يلي:

(١) أ ∋ س (٢) أ ∋ ص

(٣) س ⊃ ص (٤) {أ} ∋ س (٥) {أ} ∋ ص

(٥٧) أوجد:

(١) ناتج جمع $\frac{١}{٣}$ + $\frac{-٢}{٥}$

(٢) باقي طرح $\frac{١}{٣}$ من $\frac{-٢}{٥}$

(٣) حاصل ضرب $(\frac{١}{٣})(\frac{-٢}{٥})$

(٤) خارج قسمة $\frac{١}{٣}$ على $(\frac{-٢}{٥})$

(٥٨) صل بين كل مفردة من مفردات القائمة أ بما يناسبها من مفردات القائمة ب:

القائمة أ	القائمة ب
(١) { ٢ ، ٣، ٥ ، ٧ }	(١) مجموعة عناصر من الاعداد الطبيعية الزوجية
(٢) { ٣ ، ٥ ، ٧ }	(٢) مجموعة أحرف كلمة الحقل
(٣) $\sqrt[٣]{٦٤}$	(٣) العدد الطبيعي ٨
(٤) {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}	(٤) العدد الطبيعي ٤
(٥) {أ ، ل ، ح ، ق}	(٥) مجموعة عناصر من الأعداد الطبيعية الأولية
(٦) $\sqrt{٦٤}$	(٦) مجموعة أرقام العدد ٢٣٢٤٥٥
(٧) {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}	(٧) مجموعة عناصر الأعداد الطبيعية الفردية

(٥٩) أجب بنعم أو لا:

(١) $(١ + \frac{٢}{٣})^٢ = (\frac{٥}{٣})^٢$

(٢) $\sqrt{٤ \times ٣} = ٤\sqrt{٣}$

(٣) $(\frac{٥}{٣})^٢ = \frac{٢٥}{٣}$

(٤) $\sqrt{٩ \times ٤} = ٣ \times ٢$

(٥) $\sqrt{٩ + ٤} = ٣ + ٢$

(٦٠) بيّن أن:

(١) $\frac{\sqrt{٣٦٣}}{\sqrt{٣}} = ١١$

(٢) $\sqrt{٩٩} - \sqrt{٤٤} = \sqrt{١١}$

(٣) $\sqrt{٦٨}\ \sqrt{١٧} = ٣٤$

(٦١) اذا كانت س $= \sqrt{٢}$ ، ص $= ٢\sqrt{٢}$ ، ع $= ٣\sqrt{٢}$

فما قيمة كل من:

س ص ع ، $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}$. {$١٢\sqrt{٢}$ ، ٢٨}

(٦٢) اذا كان عدد عناصر المجموعة س = ١٠

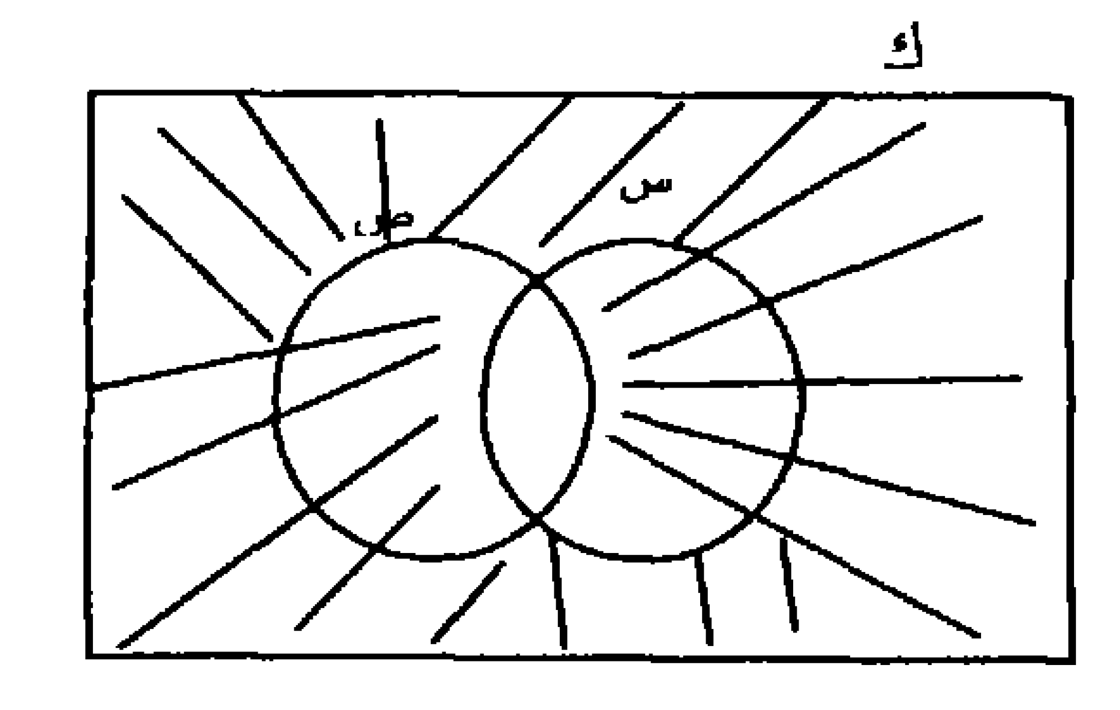
وكان عدد عناصر المجموعة ص = ٨

وكان عدد عناصر المجموعة $س \cap ص = ٦$

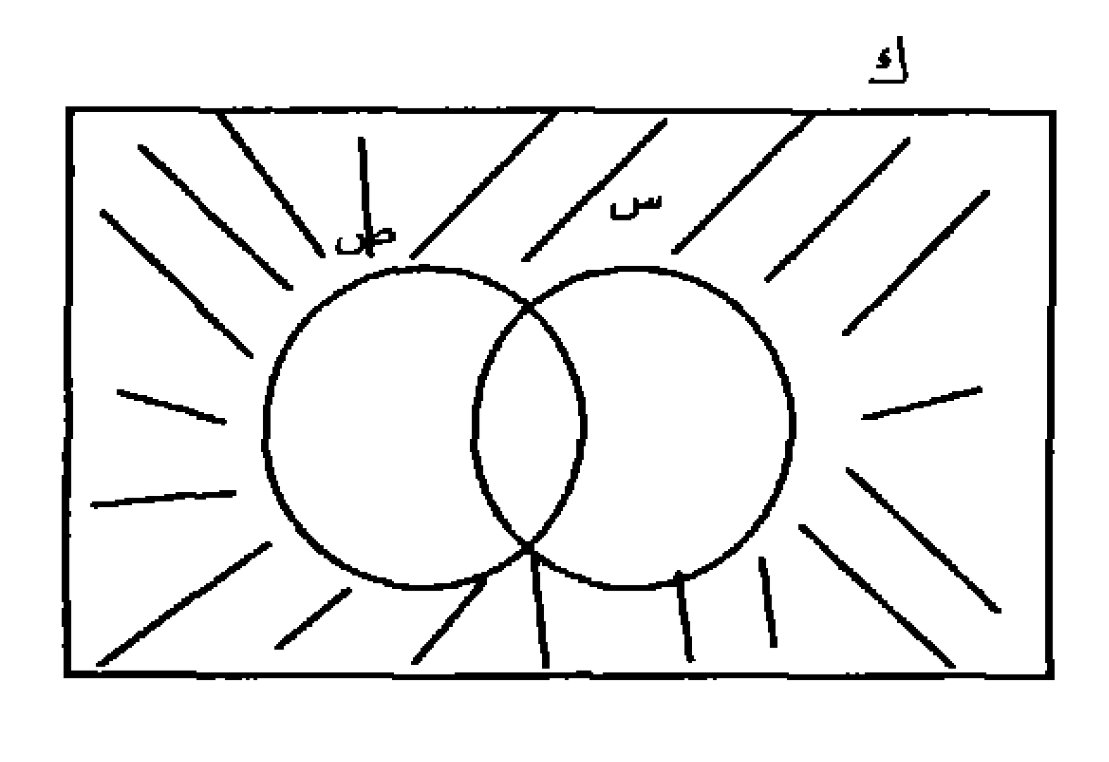
فما عدد عناصر المجموعة $س \cup ص$ {١٢}

ارشاد: استعن بمخططات فن

(٦٣) اكتب ما يمثله الجزء المظلل في كل شكل من أشكال فن التالية على شكل مجموعة واحدة:



شكل (١)



شكل (٢)

(٦٤) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٤ ، ٥}

اكتب المجموعة ع بذكر جميع عناصرها:

ع = (س ∪ ص) − (س ∩ ص)

{٢ ، ٣ ، ٥}

(٦٥) أوجد $\sqrt{517}$ لأقرب منزلة عشرية واحدة

ارشاد: احصر العدد ٥١٧ بين مربعين متتالين

هكذا ٤٨٤ < ٥١٧ < ٥٢٩

(٦٦) أي من العبارات التالية صواب:

(١) {١ ، ٢ ، ٣} ⊂ {٢ ، ٣ ، ١}

(٢) {٣} ⊂ {١ ، ٢ ، ٣}

(٣) ٣ ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

(٤) {٢} ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

(٥) ٣ ⊂ {١ ، ٢ ، ٣}

(٦٧) أي من العبارتين التاليتين هي الصواب:

(١) {٢} ⊂ {{٢}}

(٢) {٢} ∈ {{٢}}

(٦٨) اذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

ص = {أ : أ ∈ ط ، أ < ٤}

ع = مجموعة أرقام العدد ٢٤٠٣٢

هل س = ص (أم) س = ع ؟

(٦٩) ترجم مخطط فن التالي الى المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها:

(١) س − ص

(٢) ص − س

(٣) س Δ ص

(٤) (س ∪ ص)َ

(٥) (س ∩ ص)َ

(٧٠) اذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٣، ٧} ، ص = {جـ ، د ، هـ} فاملأ كل فراغ فيما يلي بما يناسبه، وبواحد من الرمزين ∈ ، ∉ لتصبح العبارات التالية صواب:

(١) (٧ ، هـ) ⋯ س × ص ، (٢) (٧ ، هـ) ⋯ ص × س

(٣) (٠ ، د) ⋯ س × ص ، (٤) (جـ ، ٠) ⋯ ص × س

(٥) (جـ ، د) ⋯ س × س ، (٦) (١ ، ٣) ⋯ ص × ص

(٧) (١ ، ٠) ⋯ س × ص

(٧١) اختصر لأبسط صورة:

$$\frac{٥}{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}} - \frac{٥}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}} \qquad \left\{ \frac{-١٠\sqrt{٢}}{٣} \right\}$$

ارشاد: استعن بانطاق المقام

(٧٢) اختصر لأبسط صورة:

$$\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣\sqrt{٢٧}} \times \frac{١٥\sqrt{٢١}}{٤\sqrt{١٥}} \div \frac{٥\sqrt{١٤}}{٧\sqrt{٤٨}}$$

$\left\{\frac{١٤}{٣}\right\}$

(٧٣) ما قيمة: $\frac{١}{٣\sqrt{٥} - ٦}$ باعتبار $\sqrt{٥} = ٢,٢٤$

ارشاد: انطق المقام أولاً { ١٤١ }

(٧٤) أوجد $\sqrt[٣]{١٢٨}$ لأقرب منزلة عشرية واحدة.

ارشاد: احصر العدد ١٢٨ بين مكعبين متتالين أي:

$$١٢٥ < ١٢٨ < ٢١٦$$

(٧٥) اختصر لأبسط صورة:

$$\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٤٨}$$

(٧٦) اكتب ثلاثة أعداد نسبية كلاً منها يكافئ العدد النسبي $\frac{٢}{٩}$

(٧٧) اكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها:

(١) أ = {س : س بلد عربي يقع في قارة آسيا}

(٢) ب = {س : س بلد عربي يقع في قارة أوروبا}

(٣) جـ = {س : س بلد عربي يقع في قارة افريقيا}

(٧٨) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} وكانت مجموعة المجموعات الجزئية لها (مجموعة القوة)

ق = {ϕ، {١ ، ١}، {٢}، {٣}، {١ ، ٢}، {٢ ، ٣}، {١ ، ٣}، {١، ٢، ٣}}

فلماذا هذه العبارات خاطئة؟ ثم صححها.

(١) س ⊃ ق

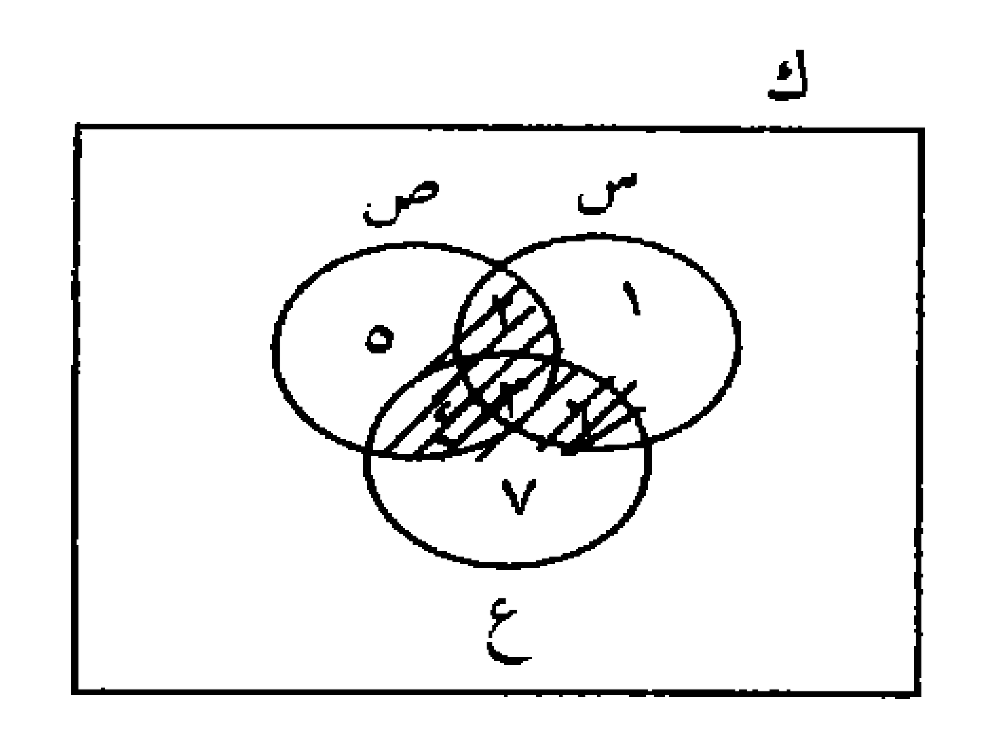
(٢) ١ ∋ ق

(٣) {٢} ⊃ ق

(٧٩) عبّر عن المنطقة المظللة بمخطط فن التالي مستخدماً المجموعات:

س ، ص ، ع

وعمليتي ∪ ، ∩ فقط



(٨٠) مثّل العدد النسبي $\frac{١}{١٧}$ تمثيلاً عشرياً {٠.٠$\overline{٥٩}$}

(٨١) اكتب قاعدة العلاقة التي تربط بين المتغيرين س ، ص مستعيناً بالجدار للتالية:

(١)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٤	٩	١٦	٢٥

{ص = $س^٢$}

(٢)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٢	٥	١٠	١٧	٢٦

{ص = $س^٢$ + ١}

(٣)

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

{ص = $س^٢$ - ١}

ارشاد: اعتمد طريقة التجربة والخطأ في ايجاد القاعدة.

(٨٢) مثّل الاعداد النسبية التالية تمثيلاً عشرياً:

$\frac{٢٥}{٤}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١٣}{٩}$

{٦,٢٥ ، $٠,٨\overline{٣}$ ، $١.\overline{٤}$}

(٨٣) صنّف الأعداد التالية الى أعداد نسبية وأعداد غير نسبية:

٣,٧ ، $٠.\overline{١٦}$ ، $\sqrt{٥}$ {نعم ، نعم ، لا}

(٨٤) أيّ من الأعداد الحقيقية التالية ينتمي الى الفترة (− ٥ ، ∞) ،

− ٧ ، − ٥ ، ٢ ، $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٥}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، صفر

(٨٥) عبّر عن كل من الأعداد العشرية التالية بالصورة النسبية $\frac{أ}{ب}$

١.١ ، $٠.\overline{٧}$ ، ٠,٠٩

(٨٦) اذا علمت أن $(١,٧٣٢)^{٢} = ٣$ فما قيمة $٢\sqrt{٣}$ لأقرب ثلاث منازل عشرية؟

(٨٧) اذا علمت أن $\frac{١}{٣} = ٠.\overline{٣}$ { وتحقق من ذلك بالقسمة الطويلة}

فبيّن أن $٠.\overline{٩} = ١$

(٨٨) ما قيمة ما يلي بأبسط صور ممكنة:

(١) $\frac{٥}{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}} + \frac{٥}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}$ (٢) $\frac{٥}{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}} - \frac{٥}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}$

(٣) $\frac{٥}{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}} \times \frac{٥}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}$ (٤) $\frac{٥}{\sqrt{٥}+\sqrt{٢}} \div \frac{٥}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}}$

(٨٩) فصل دراسي عدد طلابه ٤٥، منهم ٢٠ يدرسون اللغة الانجليزية على الأقل، ومنهم ٢٥ يدرسون اللغة الالمانية على الأقل، وعدد الذين يدرسون لغة واحدة على الأقل ٣٨ طالب.

ما عدد الطلاب الذين لا يدرسون الانجليزية ولا الألمانية؟ { ٧ }

ارشاد: استعن بمخططات فن، عدد الذين يدرسون اللغتين معاً = ٤٥ - ٣٨ = ٧

(٩٠) اذا كانت ك = {١ ، ٣، ٥ ، ... ، ٢٩ }

وكانت المجموعات س ، ص ، ع مجموعات جزئية من المجموعة ك

وكانت س = {أ : أ مضاعفات العدد ٣}

ص = {ب : ب مضاعفات العدد ٥}

ع = {جـ : جـ مضاعفات العدد ٧}

اكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها:

سَ ∩ صَ ، سَ − عَ ، صَ ∪ عَ .

(٩١) اذا كان أ عدد حقيقي غير سالب وكذلك ب ،

فإن $أ^2 + ب^2 \geq (أ + ب)^2$ ؟

والسؤال: وضّح بمثال متى يكون $أ^2 + ب^2 = (أ + ب)^2$

(٩٢) اكتب الأعداد الحقيقية التالية بأبسط صورة ممكنة:

$\frac{١١٧}{٢٦٠}$ ، $\frac{-٣٩}{٦٥}$ ، $\frac{٤٥}{-٧٥}$ ، $\frac{-١٠٥}{-٣٧٥}$

{ $\frac{٩}{٢٠}$ ، $-\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ }

(٩٣) أي من المجموعات التالية خالية؟

أ = {س : س عدد صحيح أقل من ١}

ب = {ص : ص عدد طبيعي أقل من ١}

جـ = { ع : ع عدد نسبي أقل من ١}

د = { ل : ل عدد حقيقي أقل من ١}

(٩٤) بيّن المسقط الخطأ والمسقط الصواب في كل زوج من الأزواج المرتبة التالية:

(١) ({أ} ∋ {أ} ، {أ} ⊂ {أ})

(٢) (ϕ ∋ {٢} ، ϕ ⊂ {٢})

(٣) ({أ} ∋ {أ} ، {أ} ⊂ {{أ}})

(٩٥) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها:

س= { أ : أ عامل من عوامل العدد ٢٤}

ص= {ب : ب عامل من عوامل العدد ١٨}

ع = {جـ : جـ عامل من العوامل المشتركة للعددين ١٨ ، ٢٤}

(٩٦) اذا كانت س= {١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} {س ∧ ص = ع}

ص= {٣ ، ٤ ، ٥، ٦ ، ٧}

مثّل بمخططات فن المجموعات التالية ولكن كل على انفراد:

(١) س − ص (٢) ص − س (٣) س Δ ص

(٩٧) اذا علمت أن ك = المجموعة الكلية ، ϕ = المجموعة الخالية: س ⊂ ك

أعط مثالاً واحداً فقط لبيان أن:

(١) س − س = ϕ (٢) س - ϕ = س

(٣) س ∪ س = س (٤) س ∩ س = س

(٥) ϕ - س = ϕ (٥) س − ك = ϕ

(٧) ك - ϕ = ك

(٩٨) اذا كانت ك = مجموعة من الأشخاص

س= { س: س شخص عربي}

ص= {ص: ص شخص مدمن على شرب الشاي}

ع = {ع : ع شخص مُغرم بأكل المناسف}

(٩٩) حيث س ، ص ، ع ⊂ ك

عبّر عن كل من المجموعات التالية بجملة لغوية صحيحة:

(١) س ∩ ع: شخص عربي مغرم بأكل المناسف " ⟵ مثال"

(٢) س ∩ ص:

(٣) سَ ∩ ص:

(٤) سَ ∩ صَ:

(٥) س ∩ صَ:

(٦) سَ ∩ عَ:

(١٠٠) اكتب الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول أحد الأعداد:

{- ١ ، ٠ ، ١، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ } ومسقطها الثاني العدد ٤.

واكتب الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول كلمة "كرة" ومسقطها الثاني أحد العناصر {طائرة ، السلة ، القدم ، اليد}

(١٠١) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها:

(١) مجموعة الاتجاهات الأربعة الأصلية.

(٢) مجموعة شهور السنة الميلادية.

(٣) مجموعة ألوان الطيف السبعة.

(٤) مجموعة الحواس الخمس في الانسان.

(٥) مجموعة قارات العالم الست.

(١٠٢) أجب بالنفي (لا) أو الاثبات (نعم) عن كل من العبارات:

(١) شهر آذار ∋ س حيث س مجموعة شهور السنة الهجرية.

(٢) يوم الخميس ∋ ص حيث ص مجموعة أيام الأسبوع.

(٣) المتر ∋ع حيث ع مجموعة مقاييس للأطوال.

(٤) الغرام ∋ ل حيث ل مجموعة مقاييس للأوزان.

(١٠٣) اذا كان أ = ٤ ، ب = - ٣ ، جـ = - ٧ فما القيمة العددية لـ:

أ + ب + جـ ، أ − ب − جـ ، أ · ب ، ب · جـ ، أ (ب − جـ)

(١٠٤) احصر كلاً من الأعداد الحقيقية التالية بين مربعين متتالين:

١٢ ، ٤٥ ، ١٠٧ ، ٤١٦

(١٠٥) أوجد: ناتج جمع - ١٧ + ١٤

ناتج طرح - ١٧ من ١٤

حاصل ضرب (- ١٧) (١٤)

خارج قسمة (- ١٧) ÷ (١٤)

(١٠٦) تُريد شركة فياض ايصال المياة لمنازل ثلاثة من المشتركين في مناطق مختلفة، فإذا كانت منازلهم تبعد عن مصدر المياة الرئيسي بالأمتار:

٢١٠ ، ١٥٠ ، ٢٧٥

فما أطول ماسورة تستخدمها الشركة بحيث يلزم منها عدد صحيح لايصال المياة للمنازل الثلاثة المذكورة؟

ارشاد: استعن بالعامل المشترك الأعظم ع . م . أ

(١٠٧) أحصر الأعداد الحقيقية التالية بين مكعبين متتالين:

٧ ، ١٥ ، ٢٩

(١٠٨) أوجد قيمة $\sqrt[3]{117}$ لأقرب منزلة عشرية واحدة.

(١٠٩) رتِّب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تنازلياً:

$\frac{-2}{7}$ ، صفر ، $\frac{8}{7}$ ، $\frac{-9}{7}$ ، - ١ ، ١

(١١٠) اذا كانت س = - ٢ ، ص = ٥ فما قيمة كل من الأعداد التالية بأبسط صورة:

$\frac{10س}{3ص}$ ، $\frac{س}{3} + \frac{ص}{5}$ ، $\frac{1}{2س} - \frac{1}{3ص}$

(١١١) املأ الدوائر في الشكل المجاور بواحد من الأعداد الحقيقية التالية:

٧ ، $\frac{1}{3}$ ، ٥ ، $\frac{10}{3}$ ، $\frac{5}{21}$ ، $\frac{1}{2}$

بحيث يكون حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد على استقامة واحدة يساوي "١"

{لا تكرر العدد أكثر من مرة فقط}

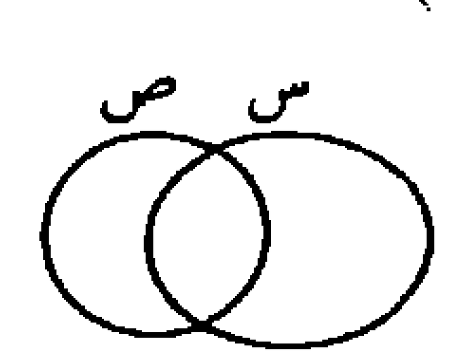
(١١٢) اذا كانت درجة الحرارة في مدينة عجلون في يوم من أيام فصل الشتاء لعام ١٩٩٠م ٧ درجات سلسيوسية، ثم بدأت بالانخفاض التدريجي بمعدل ٣ درجات يومياً، فما هي درجة الحرارة بعد ثلاثة أيام من ذلك اليوم المذكور؟

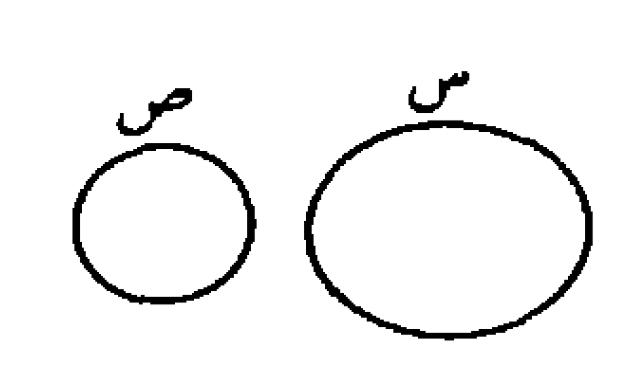
{- ٢}

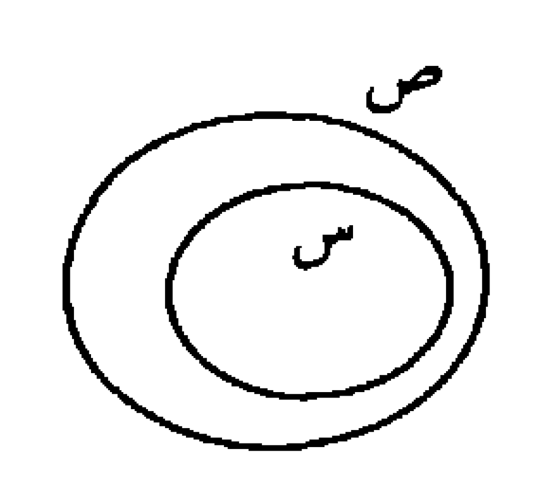
(١١٣) كم وحدة تبعد النقطة أ التي تمثل العدد - ١٥ عن النقطة ب التي تمثل العدد - ٢٣ على خط الأعداد كما في الشكل؟



(١١٤)







في كل من مخططات فن التالية للمجموعات ظلل المنطقة التي تمثل المجموعة ص − س.

(١١٥) أوجد قيمة:

(١) $\sqrt[3]{\sqrt{0.000064}}$ {٠.٢}

ارشاد: ابدأ بالجذر الداخلي

(٢) $\sqrt{\frac{٨١}{٢٢٥}}$ $\{\frac{٣}{٥}\}$

(٣) $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{١٢٥}}$ $\{\frac{٣}{٥}\}$

(١١٦) أعط أمثلة تبين فيها أن:

$$\sqrt{س + ص} \neq \sqrt{س} + \sqrt{ص}$$

$$\sqrt[٣]{س + ص} \neq \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{ص}$$

لكل س ، ص أعداد حقيقية موجبة.

(١١٧) جد ناتج:

$\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{١٢٨}$ في أبسط صورة.

(١١٨) ارتفاع قمة عمارة $٢٠\frac{١}{٤}$ متراً عن مستوى سطح الشارع العام، وعمق بئر الماء أسفل العمارة ينخفض $٥\frac{١}{٢}$ متراً عن سطح الشارع العام، ما الفرق بين ارتفاع قمة العمارة وقعر البئر؟

ارشاد: انتبه للاشارات + ، - هنا بالذات

(١١٩) بلغت درجة الحرارة العُظمى في يوم ما في المرتفعات الجبلية في الأردن نهاراً ٤.٣° س وبلغت درجة الحرارة الدنيا ليلاً في اليوم نفسه ٦.٨° س تحت الصفر، أوجد الفرق بين درجتي الحرارة نهاراً وليلاً (يسمى هذا الفرق المدى الحراري)

(١٢٠) باعتبار الصفر هو العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد الحقيقية، والواحد الصحيح هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد الحقيقية، أوجد النظير الجمعي (سالب العدد) والنظير الضربي (مقلوب العدد) للأعداد التالية:

$\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، ٣ ، $-\frac{٤}{٧}$ ، صفر ، ١ وتحقق من صحة الحل!!

(١٢١) ما طول كل من الفترات التالية:

$(-٦ ، -٢]$ ، $(-٦ ، -٢)$ ، $[٤ ، ٧]$ ، $[٤ ، ٧)$

(١٢٢) ما قيمة كل من:

$\frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٦}$ ، $\frac{٤}{٥} - \frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥} + \frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٣}{٩} \times \frac{-٣}{٩}$

(١٢٣) اذا كان $(\sqrt{١١})^{٢} = ١١$ (وهذا معلوم)

فأي من العبارات التالية هي الصواب:

$\sqrt{١١} = ٣,٣$ ، $\sqrt{١١} < ٣,٣$ ، $\sqrt{١١} > ٣,٣$

ارشاد: أوجد $(٣,٣)^{٢}$ أولاً

(١٢٤) اذا كان أ < ب ، حيث أ ، ب أعداد حقيقية موجبة، أعط أمثلة توضح فيه أن:

$\sqrt{ب} - \sqrt{أ} < \sqrt{ب - أ}$

ارشاد: افرض ب = ٢٥ ، أ = ٩ على سبيل المثال

(١٢٥) اذا كان أ = $ب^٢$

فأي من العبارتين هي الصواب:

الأولى: أ $\leq$ صفر

الثانية: ب $\leq$ صفر

(١٢٦) اكتب العدد $\sqrt{١٠}$ لأقرب منزلة عشرية واحدة.

ارشاد: احصره بين مربعين متتالين.

(١٢٧) اذا كان س + ١٠ ص = ٦ (س + ص) لكل س ، ص أعداد حقيقية

بيّن أن ص + ١٠س = ٥ (س + ص)

ارشاد: أوجد س بدلالة ص أو العكس.

(١٢٨) اكتب العددين الحقيقيين التاليين بالصورة العلمية:

٨٩٠٠٠ ، ٠,٠٠٠٧٣٥

(١٢٩) اذا كان عدد عاصر المجموعة الكلية ك = ٢٢

وعدد عناصر المجموعة س = ١٠

وعدد عناصر المجموعة ص = ١١

وعدد عناصر المجموعة س $\cap$ ص = ٤

أوجد عدد عناصر المجموعة $(س \cup ص)'$

{٥}

ارشاد: استعن بمخططات فن.

(١٣٠) أيّ من الأعداد النسبية التالية:

$\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٥}{١٠}$

يمكن تمثيله عشرياً بكسر دوري؟

(١٣١) اذا كان أ ، ب عددان صحيحان موجبان غير متساويين، فأي من العلاقات التالية هي الصواب:

(١) ٢ أ ب $<$ أ^{٢} + ب^{٢}

(٢) ٢ أ ب = أ^{٢} + ب^{٢}

(٣) ٢ أ ب $>$ أ^{٢} + ب^{٢}

بيّن بأمثلة عددية.

(١٣٢) صنّف الأعداد الحقيقية التالية الى أعداد نسبية أو غير نسبية:

$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt[٣]{٨}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$

٠,٥ ، ٠.$\overline{٥}$ ، $-\sqrt{٥}$

(١٣٣) تنظم شركة سياحية رحلات من احدى المدن {بيروت، القاهرة، عمان} الى واحدة من المدن التالية {لندن ، باريس، روما}.

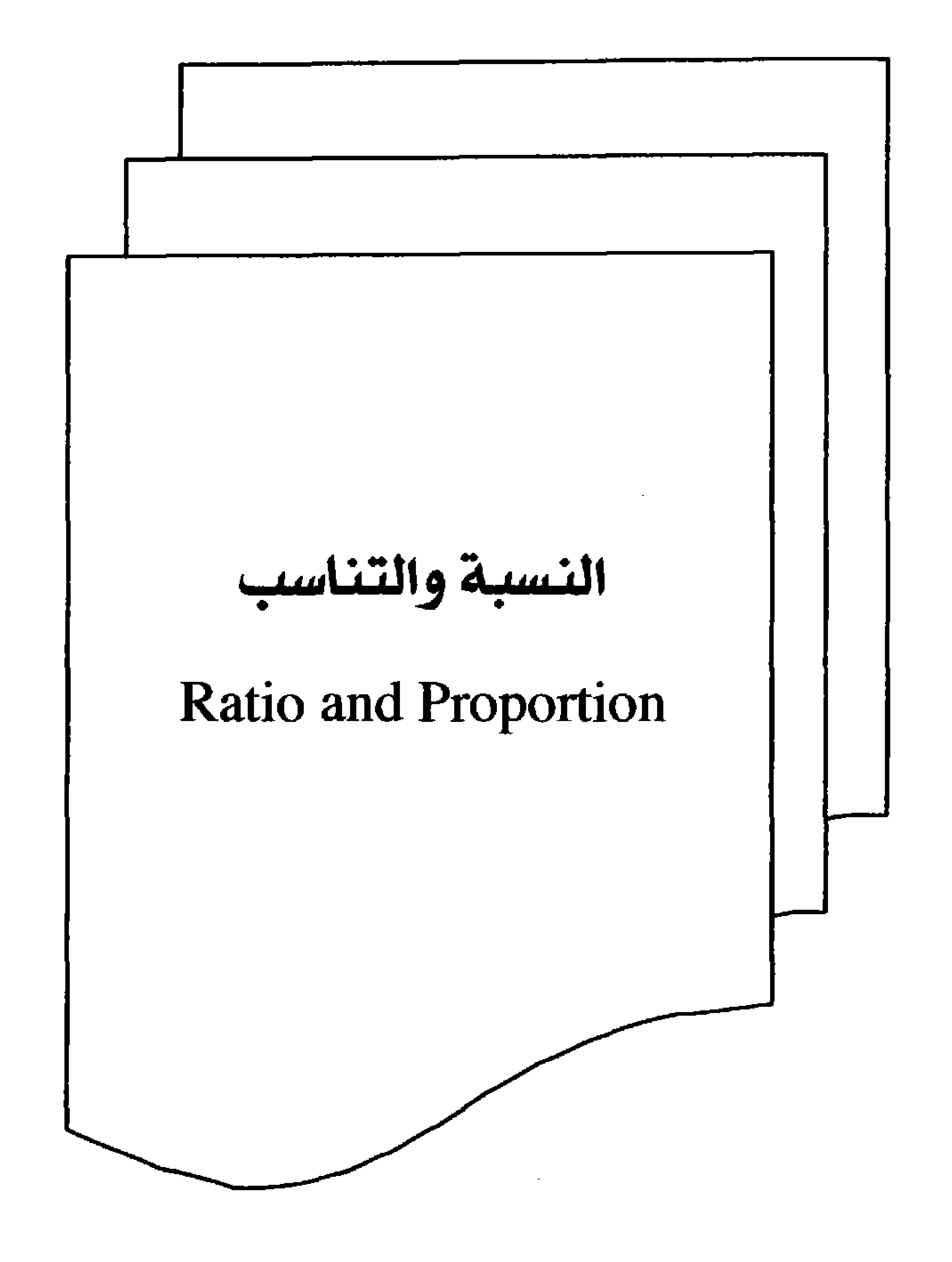
اكتب مجموعة هذه الرحلات على شكل أزواج مرتبة مستعيناً بحاصل الضرب الديكارتي.

(١٣٤) اكتب زوايا المثلث أ ب جـ على شكل ثلاثيات مرتبة، في كل حالة من الحالات:

(١) ∢ أ = ٤٠°، ب = ٦٠°، جـ = ٨٠°

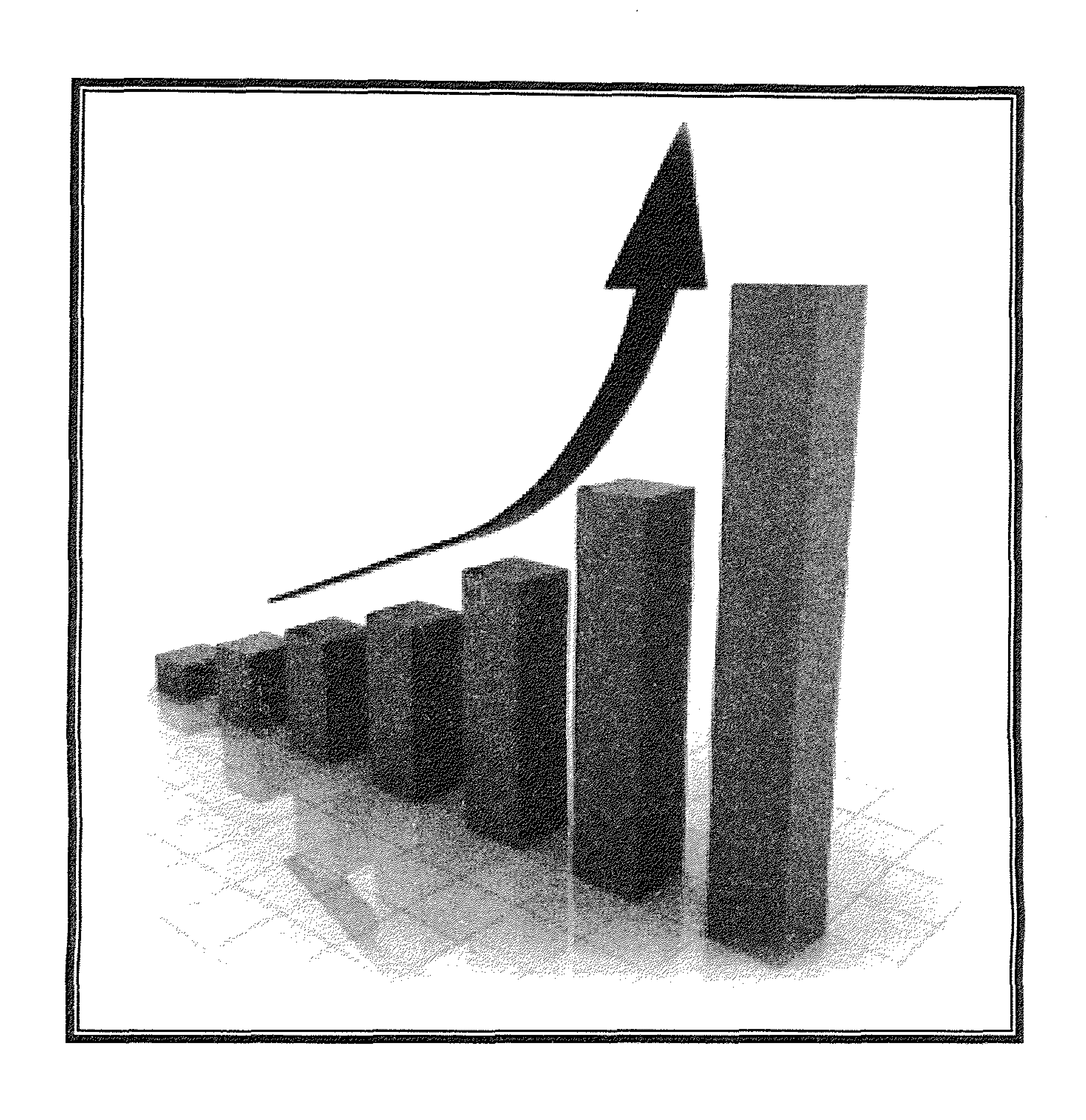
(٢) ∢ أ = ∢ ٤° = ٥٠°

(٣) ∢ أ = ∢ ب، جـ = ٩٠°



النسبة والتناسب

Ratio and Proportion



(٢- ١) النسبة Ratio:

تعني النسبة المقارنة بين عددين حقيقيين وما ينتج من خارج قسمة العدد الأول على العدد الثاني وبالترتيب:

فالنسبة بين العددين الحقيقيين أ و ب هي $\frac{أ}{ب}$ = أ : ب

(حيث تُقرأ أ الى ب)

فالعددان أ ، ب هما حدا النسبة Terms

والعدد أ يسمى مقدم النسبة Antectedent

والعدد ب يسمى ثاني النسبة Consequent

مثال:

اذا كان عمر سلمى ١٨ سنة وعمر ليلى ٢٤ سنة فإن:

نسبة عمر سلمى الى عمر ليلى = $\frac{\text{عمر سلمى}}{\text{عمر ليلى}}$ = $\frac{١٨}{٢٤}$ = ١٨ : ٢٤

نسبة عمر ليلى الى عمر سلمى = $\frac{\text{عمر ليلى}}{\text{عمر سلمى}}$ = $\frac{٢٤}{١٨}$ = ٢٤ : ١٨

وبما أن النسبة تكتب بصورة عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ أو ككسر عادي فإنها تُبسط كما يبسط الكسر العادي أو العدد النسبي بأن يقسم مقدم النسبة وتاليها على العامل المشترك الأكبر بينهما ، لذلك فإن:

١٨ : ٢٤ = $\frac{\cancel{١٨}^{٣}}{\cancel{٢٤}_{٤}}$ = ٣ : ٤

وكذلك ٢٤ : ١٨ = $\frac{\cancel{24}^{\,4}}{\cancel{18}_{\,3}}$ = ٤ : ٣

ومن صفات النسبة أنها مجردة بلا وحدة قياس تميزها هكذا:

ان نسبة ٨سم : ١٢ سم = $\frac{\cancel{8\text{سم}}}{\cancel{12\text{سم}}}$ = $\frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{12}_{\,3}}$ = $\frac{2}{3}$ = ٢ : ٣

والنسبة بين ٥٠ قرشاً الى ٣ دنانير = $\frac{\cancel{50\text{ قرشا}}}{\cancel{3 \times 100\text{ قرشا}}}$ = $\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{30}_{\,6}}$ = ١ : ٦

بعد توحيد وحدات القياس لكل من المقدم والتالي.

مثال:

اذا كان عمر عبير ٥ سنوات و ٦ شهور

وكان عمر سمير ٦ سنوات و ٥ شهور

أوجد النسبة بين عمر عبير الى عمر سمير.

الحل:

نحوّل الأعمار الى شهور حتى يسهل ايجاد النسبة وتكون الأعمار مقاسة بنفس وحدات القياس (الشهور).

" أنت تعلم أن السنة = ١٢ شهراً"

عمر عبير = (٥ × ١٢) + ٦ = ٦٠ + ٦ = ٦٦ شهراً

عمر سمير = (٦ × ١٢) + ٥ = ٧٢ + ٥ = ٧٧ شهراً

$$\frac{\text{عمر عبير}}{\text{عمر سمير}} = \frac{\text{٦٦ شهرا}}{\text{٧٧ شهرا}} = \frac{\cancel{٦٦}^{٦}}{\cancel{٧٧}_{٧}} = ٦ : ٧$$

(٢- ٢) النسبة المئوية Percentage:

النسبة المئوية كسر عادي مقامه ١٠٠

أو نسبة تاليها ١٠٠

فالكسر العادي $\frac{٧٨}{١٠٠}$ يمثل نسبة مئوية. تكتب على الصورة ٧٨٪

والكسر العادي $\frac{٤٥}{٥٠}$ يحول الى نسبة مئوية يجعل مقامه ١٠٠ هكذا:

$$\frac{٤٥}{٥٠} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٩٠}{١٠٠} = ٩٠٪$$

وأما الكسر العادي $\frac{٣}{٨}$ يحول الى نسبة مئوية بطريقة قسمة بسطه على مقامه وعلى شكل كسر عشري هكذا:

$$\frac{٣}{٨} = ٠,٣٧٥ = \frac{٣٧٥}{١٠٠٠} \times ١٠٠٪$$

$$= ٣٧,٥ ٪$$

```
      ٠,٣٧٥
  ٨ | ٣
      ٢٤
      ---
      ٦٠
      ٥٦
      ---
      ٤٠
      ٤٠
      ---
      ٠٠
```

وهكذا فالعلاقة بين النسبة المئوية والكسر العادي والكسر العشري تظهر كما يلي:

$$\frac{٦٤}{١٠٠} \longrightarrow ٠.٦٤ = \longrightarrow ٦٤\% =$$

فالكسر العشري ٠.٧ = $\frac{٧}{١٠} = \frac{٧}{١٠} \times ١٠٠\% = ٧٠\%$

مثال:

حوّل $\frac{٨}{١٥}$ الى كسر عشري ونسبة مئوية

نبدأ بقسمة البسط ٨ على المقام ١٥ = ٠,٥٣

```
   ٠,٥٣
١٥ | ٨
   ٧٥
   --
   ٥٠
   ٤٥
   --
    ٥
```

$\therefore \frac{٨}{١٥} = ٠.٥٣ = \frac{٥٣}{١٠٠} \times ١٠٠\% = ٥٣\%$

وعند تحويل الكسر العشري ٣.٤٦٥٨ الى نسبة مئوية نظرية في ١٠٠٪

= ٣.٤٦٥٨ × ١٠٠٪ = ٣٤٦,٥٨ ٪ هكذا

وللنسبة المئوية تطبيقات عديدة في مجال الحياة ومنها في عمليات البيع والشراء، كما في المثال:

مثال:

اشترى خالد غسالة كتب عليها ٦٤٠ دينار، فإذا كان المحل التجاري يخصم لزبائنه ١٥٪ من ثمنها المكتوب، جد المبلغ الذي دفعه خالد ثمناً للغسالة.

قيمة الخصم = $\frac{١٥}{١٠٠}$ × الثمن المكتوب = $\frac{\overset{٣}{\cancel{١٥}}}{\underset{٢}{\cancel{١٠٠}}} \times \overset{٣٢}{\cancel{٦٤}}$ = ٩٦ دينار

ما دفعه خالد = ٦٤٠ − ٩٦ = ٥٤٤ دينار

أو:

ما دفعه خالد = ١٠٠٪ - ١٥٪ = ٨٥٪ من الثمن المكتوب

مادفعه خالد = $\frac{٨٥}{١٠٠}$ × ٦٤٠ = ٥٤٤ دينار

مثال:

باع حمدان سيارته التي اشتراها بمبلغ ٥٠٠٠ دينار بمكسب ٢٠٪ فبكم دينار باعها؟

ثمن البيع = ١٠٠٪ + ٢٠٪ = ١٢٠٪ من ثمن الشراء

ثمن البيع = $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠٠ = ٦٠٠٠ دينار

(٢- ٣) التناسب Proportion:

التناسب هو تساوي نسبتين مثل $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

أو:

أ : ب = جـ : د

فالعددان أ ، د يسميا طرفا التناسب extremes

والعددان ب ، جـ يُسميا وسطا التناسب means

وحتى تشكل النسبتان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ تناسباً يجب أن يكون:

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

ويترجم هذا الكلام بقاعدة الضرب التبادلي Cross Multiplication:

وبالرموز:

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ← أ د = ب جـ (قاعدة الضرب التبادلي)

وحتى تشكل النسب $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ تناسباً يجب أن يكون أ د = ب جـ

أي أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ← أ د = ب جـ والعكس صواب.

مثال:

هل تشكل النسبتان $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٨}$ تناسبا؟ ولماذا؟

الحل:

$\frac{٣}{٤} \overset{?}{=} \frac{٧}{٨}$ (وتقرأ هل $\frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٨}$)

بالضرب التبادلي ٣ × ٨ $\overset{?}{=}$ ٤ × ٧

أي أن ٢٤ $\neq$ ٢٨

ومنها $\frac{٣}{٤} \neq \frac{٧}{٨}$

أي $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٨}$ لا تشكلان تناسباً اطلاقاً.

مثال:

هل تشكل النسبتان $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{١٠}{١٢}$ تناسباً؟ ولماذا؟

الحل:

$\frac{٥}{٦} \overset{?}{=} \frac{١٠}{١٢}$

وبالضرب التبادلي: $٥ \times ١٢ \overset{?}{=} ٦ \times ١٠$

$$٦٠ \overset{?}{=} ٦٠$$

نعم: $٦٠ = ٦٠ \longleftarrow$ اذن $\frac{٥}{٦} = \frac{١٠}{١٢}$ وتشكلان تناسباً

وكذلك: $\frac{-٢٠}{٥}$ ، $\frac{-١٦}{٤}$ تشكلان تناسباً لأن:

$$(-٢٠)(٤) = (٥)(-١٦)$$

كون: $-٨٠ = -٨٠$

مثال:

هل العددان النسبيان $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٧}{١٤}$ متساويان؟

باعتبار أن العددين النسبيين كنسب، فإن التساوي ينتج من الضرب التبادلي. وكأن السؤال: هل النسبتان $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٧}{١٤}$ تشكلان تناسباً؟

أي $\frac{٣}{٦} \overset{?}{=} \frac{٧}{١٤}$

$$(٣)(١٤) \overset{?}{=} ٦ \times ٧$$

أي $٤٢ = ٤٢$

نعم $\frac{٣}{٦} = \frac{٧}{١٤}$ كعددين نسبيين متساويين

أو كتناسب لكون النسبتين $\frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٧}{١٤}$ متساويتان

× **نوعا التناسب:**

للتناسب نوعين هما:

تناسب طردي Direct Preportion:

مثال:

اذا كان ثمن كتاب واحد هو ٥٠ قرشاً فما ثمن ٣ كتب من نفس النوع

ثمن الكتب = ثمن الكتاب × العدد

= ٥٠ × ٣ = ١٥٠ قرشاً

فالملاحظ أن ثمن الكتب يزداد بزيادة عددها.

وان ثمن الكتاب = $\frac{\text{ثمن الكتب}}{\text{عددها}}$ = مقداراً ثابتاً = ٥٠ قرشاً في هذا السؤال.

هذا هو التناسب الطردي بين ثمن الكتب وعددها.

وبما أن التناسب يشتمل على أربعة حدود هما الطرفان والوسطان، فإذا علم من حدوده ثلاثة، فإننا نستطيع أن نعلم الحد الرابع بطريقة الضرب التبادلي كما يلي:

اذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن أ د = ب جـ

مثال:

اذا قطعت سيارة ١٦٠ كم في ساعتين، فكم كيلومتراً تقطع في ٥ ساعات اذا سارت بنفس السرعة؟

من الملاحظ أن المسافة التي تقطعها السيارة تزداد بزيادة الزمن (عدد الساعات) لذا فالتناسب طردي، وحله (حل التناسب) يكون بالضرب التبادلي كالتالي:

كم ساعة
١٦٠ ← ٢
ن ← ٥

والضرب التبادلي: $\frac{٢}{٢} \times$ ن = $\frac{١٦٠}{٢} \times ٥$

ن = (٨٠) (٥) = ٤٠٠ كم تقطع في ٥ ساعات

تناسب عكسي Inverse Proportion:

يحتاج رجل الى ٥ ساعات لحراثة حديقة منزل، فكم ساعة يحتاج رجلان لحراثة نفس حديقة المنزل؟

نلاحظ أن عدد الرجال × عدد الساعات = ١ × ٥٠,٥ ساعة يحتاج حراثة المنزل

وكذلك عدد الرجال × عدد الساعات = ٢ × ن = ٢ن ساعة تحتاج حراثة الحديقة

أي أن $\frac{٢}{٢}$ ن = $\frac{٥}{٢}$ (حراثة الحديقة في الحالتين)

ن = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥ ساعة يحتاج رجلان لحراثة نفس الحديقة

نلاحظ أنه كلما ازداد عدد الرجال قلّت عدد الساعات اللازمة للقيام بنفس العمل.

هذا هو التناسب العكسي ← اذا ازداد المتغير الأول (رجال)

قلَّ المتغير الثاني (ساعات) للقيام بنفس العمل

وقد يكون بالضرب الأفقي هكذا:

رجال ساعات
١ ← ٥
٢ ← ن

وبطريقة الضرب الأفقي

$$\frac{١ \times ٥}{٢} = \frac{٢}{٢} \times ن$$

∴ ن = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥ ساعة يحتاج رجلان للقيام بنفس العمل.

مثال:

يستغرق ٤ رجال الى ٢٤ يوماً لجني محصول ثمار بستان من الزيتون، فكم يوماً يحتاج ٦ رجال لجني محصول نفس البستان؟

رجال		ساعات
١	←	٥
٢	←	ن

وبالضرب الأفقي: $\frac{١ \times ٥}{٢} = \frac{٢}{٢} \times ن$

ن = ١٦ يوماً يحتاج ٦ رجال.

× قوانين التناسب:

للتناسب ($\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$) عدة قوانين نعرض بعضاً منها فقط لأهميتها كما يلي:

× اذا كان $\frac{٧}{١٤} = \frac{٨}{١٦}$ ← فإن $\frac{١٤}{٧} = \frac{١٦}{٨}$

كون (١٤ × ٨) = (٧ × ١٦) = ١١٢

وبشكل عام اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$ (مقلوب النسبتين)

× اذا كان $\frac{٧}{١٤} = \frac{٨}{١٦}$ ← فإن $\frac{٧}{٨} = \frac{١٤}{١٦}$

كون (٧ × ١٦) = (٨ × ١٤) = ١١٢

وبشكل عام اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ (ابدال الوسطين)

× ومن قوانين التناسب ما يفيد في حل مسائل أو تطبيقات في العلوم الأخرى

× اذا كان $\frac{٥}{١٠} = \frac{٦}{١٢}$ ← فإن $\frac{٥ + ١٠}{١٠} = \frac{٦ + ١٢}{١٢}$

لأن $\frac{١٥}{١٠} = \frac{١٨}{١٢}$ كون (١٥ × ١٢) = ١٠ × ١٨ = ١٨

وبشكل عام اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

ليس هذا فحسب بل $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$

لأن $\frac{٥ - ١٠}{١٠} = \frac{٦ - ١٢}{١٢} \leftarrow \frac{-٥}{١٠} = \frac{-٦}{١٢}$

كون (- ٥) (١٢) = (- ٦) (١٠) = - ٦٠

× اذا كان $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨} \leftarrow$ فإن $\frac{٣ + ٦}{٤ + ٨} = \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$ أيضاً

كون $\frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ لأن ٩ × ٤ = ١٢ × ٣ = ٣٦

وكذلك $\frac{٩}{١٢} = \frac{٦}{٨}$ لأن ٩ × ٨ = ٦ × ١٢ = ٧٢

وبشكل عام اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ + جـ}{ب + د} = \frac{جـ}{د}$

ليس هذا فحسب بل: $\frac{أ}{ب} = \frac{أ - جـ}{ب - د} = \frac{جـ}{د}$

كون $\frac{٣}{٤} = \frac{٣ - ٦}{٤ - ٨} = \frac{٦}{٨}$

لأن $\frac{٣}{٤} = \frac{-٣}{-٤} = \frac{٦}{٨}$

وكذلك $\frac{أ + ب}{جـ + د} = \frac{أ - ب}{جـ - د}$ (تحقق من المساواة)!!

والآن نلخص قوانين التناسب السبعة بما يلي وبالرموز فقط:

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن:

(i) $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{جـ}$ (المقلوب لكل من النسبين)

(ii) $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$ (ابدال الوسطين)

(iii) $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$ (الجمع لحدي النسبة)

(iv) $\frac{أ - ب}{ب} = \frac{جـ - د}{د}$ (الطرح لحدي النسبة)

(v) $\frac{أ}{ب} = \frac{أ + جـ}{ب + د} = \frac{جـ}{د}$ (نسبة ثالثة بالجمع)

(vi) $\frac{أ}{ب} = \frac{أ - جـ}{ب - د} = \frac{جـ}{د}$ (نسبة ثالثة بالطرح)

(vii) $\frac{أ + ب}{جـ + د} = \frac{أ - ب}{جـ - د}$ (الجمع يساوي الطرح)

"وهذا البند بشكل عام":

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \cdots = \frac{م}{ن}$

فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ + و + هـ + \cdots + م}{ب + د + و + \cdots + ن}$ وهكذا...

مثال:

اذا كان $\frac{٢}{٧} = \frac{٦}{٢١}$ فاملأ الفراغات المتجسدة بالمستطيلان فيما يلي وباستخدام قوانين التناسب لتحقق المساواة في كل منها:

× $\frac{٢}{٦} = \frac{٧}{\boxed{٢١}}$ كون $٢ \times ٢١ = ٧ \times ٦ = ٤٢$

التحقق بالضرب التبادلي دائماً. أو بالتبسيط والاصفار أحياناً.

× $\frac{٢}{٢ + ٧} = \frac{\boxed{٦}}{\boxed{٦ + ٢١}}$ كون $\frac{٢}{٩} = \frac{\cancel{٦}^{٢}}{\cancel{٢٧}_{٩}} = \frac{٢}{٩}$

× $\frac{٢ + ٧}{٢ - ٧} = \frac{\boxed{٦ + ٢١}}{٦ - ٢١}$ كون $\frac{٩}{-٥} = \frac{٢٧}{-١٥}$

مثال:

اذا كان $\frac{٥}{١١} = \frac{٢٠}{٤٤}$ فبين أن:

$\frac{-٦}{١١} = \frac{-٢٤}{٤٤}$ باستخدام قواعد التناسب

الحل:

بما أن $\frac{٥}{١١} = \frac{٢٠}{٤٤}$

فإن $\frac{٥ - ١١}{١١} = \frac{٢٠ - ٤٤}{٤٤}$ (الطرح لحدي كل نسبة فقط)

أي أن $\frac{- ٦}{١١} = \frac{- ٢٤}{٤٤}$

وللتحقق $(- ٦)(٤٤) = (١١)(- ٢٤) = - ٢٦٤$

(٢- ٤) مقياس الرسم Scale Drawing:

عند رسم الخرائط الجغرافية فإننا نقوم بتصغير مساحات القارات والدول الحقيقية ليتم تمثيلها على الورق. حسب مقياس رسم مناسب نجده دائماً في أعلى الخريطة وعلى الجانب الأيمن أو الأيسر - لست أدري- ؟

ومقياس الرسم هذا هو النسبة الثابتة بين المسافات على الخارطة الى المسافات بأبعادها الحقيقية على الأرض، أي أن:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{البعد بين النقطتين على الورق (الخارطة)}}{\text{البعد الحقيقي بينهما على الأرض}}$$

ونعبّر عن البعدين في البسط والمقام (كون النسبة كسر عادي) بوحدات القياس نفسها.

وعلى سبيل المثال:

اذا كان مقياس الرسم لخارطة ما هو ١ : ٢٥٠ ٠٠٠ فإن كل اسم على الخريطة يقابله أو يمثل على الأرض ٢٥٠ ٠٠٠ سم فإذا ما قيست المسافة الأفقية بين مدينتين على الخارطة وكانت ٣ سم فإن المسافة الحقيقية والأفقية بين المدينتين على الأرض تحسب من القانون:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{البعد على الخارطة}}{\text{البعد على الأرض}}$$

أي أن $\frac{1}{250\,000} = \frac{3 \text{ سم}}{\text{ن سم}}$

وبالضرب التبادلي ١ × ن = ٢٥٠ ٠٠٠ × ٣ سم

ن = ٧٥٠ ٠٠٠ سم البعد الحقيقي

ولما كانت المسافة الحقيقية على الأرض بين المدن تقاس بالكم = ١٠٠ ٠٠٠سم

فإن البعد الحقيقي بين المدينتين = $\frac{750\,000 \text{ سم}}{100\,000 \text{ سم}}$ = ٧,٥ كم.

مثال:

اذا كان طول سلمى ١,٤ سم وطولها في الصورة ٣,٥ سم أوجد مقياس الرسم للصورة – الصورة للانسان كالخارطة بالنسبة للدول- .

مقياس الرسم للصورة = $\frac{\text{طول سلمى في الصورة}}{\text{طولها الحقيقي}} = \frac{3.5 \text{ سم}}{1.4 \text{ م}}$

ولما كان ١ م = ١٠٠ سم

فإن مقياس الرسم في الصورة = $\frac{3.5 \text{ سم}}{1.4 \times 100 \text{سم}} = \frac{35}{1400} = \frac{1}{40}$

$= \frac{1}{40}$

أي أن كل ١سم من طول الصورة يمثل ٤٠ سم من طول سلمى الحقيقي.

(٢- ٥) التقسيم التناسبي Propor tional Division:

هل تعلم أن عملية التقيسم للأشياء تتم بطريقتين هما :

(١) عملية التقسيم بالتساوي.

(٢) عملية التقسيم بالتباين – عدم التساوي-

مثال:

اقسم ٤٠ دينار بين أحمد وحمدان بالتساوي:

حصة أحمد = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ دينار

حصة حمدان = $\frac{٤٠}{٢}$ = ٢٠ دينار

أي أن حصة أحمد = حصة حمدان = ٢٠ دينار لكل منهما.

ولكن عملية التقسيم بالتباين ترتبط بعدم التساوي، كأن يأخذ حمدان ٣ حصص مقابل أن يأخذ أحمد حصتين لتباين أعمارهما!!

فهذا التقسيم غير المتساوي أو التقسيم التناسبي يتم كما يلي:

مجموع الحصص = ٣ + ٢ = ٥ حصص

مقدار الحصة الواحدة= $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨ دنانير

ما يأخذه حمدان = ٣ × ٨ = ٢٤ دينار

ما يأخذه أحمد = ٢ × ٨ = ١٦ دينار

المبلغ ٤٠ دينار

وهكذا التقسيم بالتساوي ٢٠ : ٢٠ ⟵ ١ : ٢ كنسبة:

التقسيم بالتباين ١٦ : ٢٤ ⟵ ٢ : ٣

مثال:

اقسم ١٥٥٠ دينار بين ثلاثة أشخاص بنسبة $\frac{١}{٥}$: $\frac{١}{٣}$: $\frac{١}{٢}$

أولاً: نتخلص من الكسور وذلك بضرب كل نسبة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ٥ ، ٣ ، ٢ ألا وهو ٣٠ هكذا:

٣٠ ($\frac{١}{٥}$: $\frac{١}{٣}$: $\frac{١}{٢}$) ⟵ $\frac{٣٠}{٥}$: $\frac{٣٠}{٣}$: $\frac{٣٠}{٢}$

= ٦ : ١٠ : ١٥

مجموع الحصص = ٦ + ١٠ + ١٥ = ٣١ حصة

مقدار الحصة الواحدة = $\frac{١٥٥٠}{٣١}$ = ٥٠ دينار

ما يأخذه الأول = ٦ × ٥٠ = ٣٠٠ دينار

ما يأخذه الثاني= ١٠ × ٥٠ = ٥٠٠ دينار

ما يأخذه الثالث= ١٥ × ٥٠ = ٧٥٠ دينار

المبلغ ١٥٥٠ دينار

ومن الجدير بالذكر أن عملية التقسيم التناسبي تستخدم في توزيع أرباح المشاريع الاقتصادية -تجارية أو صناعية- على الشركاء كون رؤوس أموالهم في الشركة عادة لا تكون متساوية بالمقدار، لذا تقسم عليهم الأرباح بنسبة رؤوس الأموال.

كما في هذا المثال:

اشترك خالد وخلدون وخلود في مشروع تجاري، فدفع خالد ٨٠٠٠ دينار من رأس المال، ودفع خلدون ١٠٠٠٠ دينار من رأس المال، ودفعت خلود ١٢٠٠٠ دينار من رأس المال، وفي نهاية العام وزعت الأرباح البالغة ٣٠٠٠ دينار عليهم بنسبة رؤوس أموالهم أو نسبة ما دفعوه من رأس المال للمشروع، أوجد نصيب كل منهم من الأرباح.

من العدل أن توزع الأرباح بنسب تماثل النسب بين رؤوس أموالهم وهي:

٨٠٠٠ : ١٠٠٠٠ : ١٢٠٠٠

← ٨ : ١٠ : ١٢ ← ٤ : ٥ : ٦ بعد تبسيط النسب

مجموع الحصص : ٤ + ٥ + ٦ = ١٥ حصة

مقدار الحصة الواحدة: $\frac{٣٠٠٠}{١٥}$ = ٢٠٠ دينار

ما يأخذه خالد من الأرباح= ٤ × ٢٠٠ = ٨٠٠ دينار

ما يأخذه خلدون من الأرباح= ٥ × ٢٠٠ = ١٠٠٠ دينار

ما تأخذه خلود من الأرباح = ٦ × ٢٠٠ = ١٢٠٠ دينار

مجموع الأرباح ٣٠٠٠ دينار

كما أن التركات في الشريعة الاسلامية توزع على الورثة بطريقة التقسيم التناسبي كما في المثال:

توفي رجل وترك ٤٢٠٠٠ دينار، أوصى منها للجمعيات الخيرية بمبلغ ٦٠٠٠ دينار، وكان عليه دين مقداره ٤٠٠٠ دينار، فإذا ترك بعد وفاته زوجة وولدين وثلاث بنات، جد نصيب كل منهم من التركة.

حسب الشرع يخصم أولاً قيمة الوصية للجمعيات الخيرية:

٤٢٠٠٠ – ٦٠٠٠ = ٣٦٠٠٠ دينار يتبقى من التركة

ثم يسدد الدين البالغ ٤٠٠٠ دينار.

٣٦٠٠٠ – ٤٠٠٠ = ٣٢٠٠٠ دينار المتبقي للزوجة والأولاد والبنات

ثم تأخذ الزوجة نصيبها البالغ $\frac{1}{8}$ (الباقي من التركة)

= $\frac{1}{8}$ × ٣٢٠٠٠ = ٤٠٠٠ دينار

والباقي ٣٢٠٠٠ – ٤٠٠٠ = ٢٨٠٠٠ دينار يوزع على الأولاد والبنات

بنسبة ٢ : ١ - للذكر مثل حظ الأنثيين-

حصص الأولاد= ٢ + ٢ = ٤ حصص

حصص البنات= ١ + ١ + ١ = ٣ حصص

مجموع الحصص= ٤ + ٣ = ٧ حصص

مقدار الحصة الواحدة = $\frac{٢٨٠٠٠}{٨}$ = ٤٠٠٠ دينار

مقدار حصة الولد الواحد= ٢ × ٤٠٠٠ = ٨٠٠٠ دينار

مقدار حصة البنت الواحدة = ١ × ٤٠٠٠ = ٤٠٠٠ دينار

للتحقق:

للولدين + للبنات الثلاث + للزوجة = ٣٢٠٠٠ دينار

٢ (٨٠٠٠) + ٣ (٤٠٠٠) + ٤٠٠٠ = ٣٢٠٠٠ دينار

مثال:

توفيت سيدة وتركت زوجاً وولداً وبنتاً، وقدرت تركتها بعد وفاتها بمبلغ ٢٤٠٠٠ دينار.

ما نصيب كل منهم من التركة (علماً بأن حصة الزوج = $\frac{١}{٤}$ التركة)

حصة الزوج= $\frac{١}{٤}$ × ٢٤٠٠٠ = ٦٠٠٠ دينار

الباقي والبالغ= ٢٤٠٠٠ — ٦٠٠٠ = ١٨٠٠٠ دينار توزع بين الولد والبنت

بنسبة ٢ : ١

مجموع الحصص= ٢ + ١ = ٣ حصص

مقدار الحصة الواحدة= $\frac{١٨٠٠٠}{٣}$ = ٦٠٠٠ دينار

ما يأخذ الولد = ٢ × ٦٠٠٠ = ١٢٠٠٠ دينار

ما تأخذه البنت= ١ × ٦٠٠٠ = ٦٠٠٠ دينار

(٢- ٦) أمثلة محلولة على النسبة والتناسب

مثال (١):

اكتب النسب التالية بأبسط صورة:

$$\frac{١٢}{٥} \ ، \ \frac{١,٨}{٣} \ ، \ \frac{٢,٥}{٦,٥}$$

الحل:

$$\frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥} = \quad ٤ : ٥ \quad \text{بأبسط صورة}$$

$$\frac{١,٨}{٣} = \frac{١٨}{٣٠} = \frac{٣}{٥} = ٣ : ٥ \quad \text{بأبسط صورة}$$

$$\frac{٢,٥}{٦,٥} = \frac{٢٥}{٦٥} = \frac{٥}{١٣} = ٥ : ١٣ \quad \text{بأبسط صورة}$$

مثال(٢):

هل يكوِّن كل زوج من النسب التالية تناسباً أم لا؟

$$\left(\frac{٥}{٢٠} ، \frac{٤}{١٦}\right) \ ، \ \left(\frac{-٨}{٩} ، \frac{١٠}{-١٥}\right)$$

الحل:

$\frac{٥}{٢٠} \stackrel{?}{=} \frac{٤}{١٦}$ (وتقرأ $\stackrel{?}{=}$ هل تساوي)

بالضرب التبادلي (٥) (١٦) $\stackrel{?}{=}$ (٢٠) (٤)

نعم $٨٠ = ٨٠$

$\therefore$ $\frac{٥}{٢٠}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ تشكل تناسباً

ويكتب على الصورة: $\frac{٥}{٢٠} = \frac{٤}{١٦}$

ويمكن أن يقال بعد التبسيط أن:

$$\frac{\not{5}^{1}}{\not{20}_{4}} = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{\not{4}^{1}}{\not{16}_{4}} = \frac{1}{4}$$

أي أن $\frac{5}{20} = \frac{4}{16}$ كأنهما عددان نسبيان من صف تكافؤ واحد هو $\frac{1}{4}$

أي أن $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \dots$

$$\frac{-8}{9} \stackrel{?}{=} \frac{10}{-15}$$

لا : لأن $120 \neq 90$

أي أن $\frac{-8}{9}$ ، $\frac{10}{-15}$ لا يشكلان تناسباً

ويمكن أن يقال أن $\frac{-8}{9}$ ، $\frac{10}{-15}$ كعددين نسبيين ليسا من صف تكافؤ واحد.

مثال (٣):

يُنتج مصنع ٢١٠ أجهزة كهربائية في ٧ أيام، كم جهازاً ينتج في ٣٠ يوماً؟

بما أن المصنع ينتج أكثر بزيادة عدد الأيام فالتناسب طردي:

جهاز		يوم
٢١٠	←	٧
ن	←	٣٠

بالضرب التبادلي ن × $\frac{7}{7} = \frac{\not{210}^{30} \times 30}{\not{7}_{1}}$

ن = ٩٠٠ جهاز كهربائي ينتج المصنع في ٣٠ يوم تحت نفس الظروف.

مثال (٤):

يستطيع ١٢ عاملاً حفر بئر بمواصفات خاصة في ٦ أيام، بكم يوم يستطيع ١٨ عاملاً حفر بئر مماثلة له بالمواصفات؟

عامل		يوم
١٢	←	٦
١٨	←	ن

بما أن التناسب عكسي حيث بزيادة عدد العمال تقل أيام انجاز العمل،

كون البئر نفسه:

بالضرب الأفقي: $\frac{١٢}{١٨} \times ٦ = \frac{١٨}{١٨} \times \text{ن}$

ن = ٤ أيام يحتاج ١٨ عاملاً لحفر بئر مماثلة

وطريقة أخرى للحل:

١٢ × ٦ = ٧٢ يوماً يحتاج العامل الواحد لانجاز حفر البئر

$\frac{٧٢}{١٨}$ = ٤ أيام يحتاج ١٨ عامل لانجاز حفر نفس البئر

مثال (٥):

أوجد قيمة المتغيرات فيما يلي لتحقق المساواة دائماً:

(i) $\frac{٢}{٩} = \frac{\boxed{\text{ن}}}{٢٧}$

بالضرب التبادلي $\frac{٩}{٩} \times \text{ن} = ٢ \times \frac{٢٧}{٩}$

ن = ٦

(ii) اذا كان $\frac{٧}{٨} = \frac{٢١}{٢٤}$

فإن $\frac{\boxed{\text{ن}_١} + ٨}{٨} = \frac{\boxed{\text{ن}_٢} + ٢١}{٢٤}$

من خواص التناسب:

$\frac{٧}{٨} = \frac{٢١}{٢٤} \longleftarrow \frac{٨ + ٧}{٨} = \frac{٢٤ + ٢١}{٢٤}$

أي أن $\text{ن}_١ = ٧$ ، $\text{ن}_٢ = ٢٤$

(iii) اذا كان $\frac{٢}{٧} = \frac{١٤}{\boxed{ن}}$

فإن $\frac{٧}{٢} = \frac{\boxed{ن_٢}}{١٤}$

بالضرب التبادلي $\frac{٢}{٢} \times ن = \frac{٧ + \cancel{١٤}^{٧}}{\cancel{٢}_{١}}$

$ن = ٤٩$

وبالضرب التبادلي $\frac{٢ \times ن_٢}{٢} = \frac{٧ + \cancel{١٤}^{٧}}{\cancel{٢}_{١}}$

$ن_٢ = ٤٩$

مثال (٦):

حل التناسب $\frac{-٥}{١٢} = \frac{-١٠}{ن}$

$\frac{(-٥)}{-٥}(ن) = \frac{(-٥)\ (١٢)}{-٥}$

$ن = (٢)\ (١٢) = ٢٤$

مثال (٧):

وزع أحد الآباء ٤٩٠٠٠ دينار بين أبنائه الثلاثة بنسبة أعمارهم البالغة أنذاك ٤ سنوات ، ٨ سنوات ، ١٦ سنة ، كم دينار يأخذ كل منهم؟

الحصص كنسب = ٤ : ٨ : ١٦ ⟵ ١ : ٢ : ٤

مجموع الحصص = ١ + ٢ + ٤ + ٧ حصص

مقدار الحصة الواحدة = $\frac{٤٩٠٠٠}{٧}$ = ٧٠٠٠ دينار

للأول = ٧٠٠٠ × ١ = ٧٠٠٠ دينار

للثاني = ٧٠٠٠ × ٢ = ١٤٠٠٠ دينار

للثالث = ٧٠٠٠ × ٤ = ٢٨٠٠٠ دينار

المبلغ ٤٩٠٠٠ دينار

مثال (٨):

اذا كان البعد بين مدينتين على الخارطة ٣ سم وكان مقياس الرسم لتلك الخارطة هو ١ : ١٥ ٠٠٠ ٠٠٠ احسب البعد الحقيقي بين المدينتين بالكيلومترات.

مقياس الرسم = $\frac{١}{١٥ ٠٠٠ ٠٠٠} = \frac{٣ \text{ سم}}{ن \text{ سم}}$

بالضرب التبادلي ن × ١ = ٣ × ١٥ ٠٠٠ ٠٠٠

البعد الحقيقي= ٤٥ ٠٠٠ ٠٠٠ سم

وبما أن الكم = ١٠٠ ٠٠٠ سم حيث كم = ١٠٠٠ م ، م = ١٠٠ سم

البعد الحقيقي= $\frac{٤٥ ٠٠٠ ٠٠٠}{١٠٠ ٠٠٠}$ = ٤٥٠ كم

مثال (٩):

اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فما قيمة:

$\frac{أ}{ب} \left(\frac{ب + د}{أ + جـ}\right)$

الحل:

بما أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$ من خواص التناسب

ومنها $\frac{ب}{أ} = \frac{ب + د}{أ + جـ}$ من خواص التناسب

$\frac{أ}{ب} \left(\frac{ب + د}{أ + جـ}\right) = \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = ١$

مثال (١٠):

اذا كان الثمن المكتوب على تلفزيون في أحد المحلات التجارية ٧٧٠ دينار وكان المحل يخصم ١٥٪ من الثمن المكتوب، فكم ديناراً يصبح ثمن التلفزيون؟

الخصم = $\frac{\cancel{١٥}^{٣}}{\cancel{١٠٠}_{٢}}$ × ٧٧٠ = $\frac{٢٣١}{٢}$ = ١١٥,٥ دينار

الثمن بعد الخصم= ٧٧٠ – ١١٥,٥ = ٦٥٤,٥ دينار

مثال (١١):

اكتب النسبة التالية بأبسط صورة:

٤٠٠ فلس : دينارين

= ٤٠٠ فلس : ٢ × ١٠٠٠ = ٢٠٠٠ فلس

٤٠٠ فلس : ٢٠٠٠ فلس = $\frac{\cancel{٤٠}٠^{٢}}{\cancel{١٠٠}٠_{٥}}$ = ٢ : ٥

(٢ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) حل التناسبات التالية:

$$\frac{٣}{٦} = \frac{س}{١٤} \quad ، \quad \frac{٣٧٢}{س} = \frac{١٢}{٢٣}$$ {٧ ، ٧١٣}

(٢) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{١٠}$ ، $\frac{جـ}{د} = \frac{٧}{١٤}$

أوجد:

(i) $\frac{أ + ب}{ب}$ (ii) $\frac{أ + جـ}{ب + د}$

(iii) $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ (iiii) $\frac{جـ - د}{جـ}$

(٣) اذا كانت

$أ = -\frac{١}{٢}$

$ب = \frac{١}{٣}$

$جـ = -\frac{١}{٤}$

$د = \frac{١}{٥}$

(٤) أوجد (أ + ب) : (جـ : د)

(٥) املأ الفراغات فيما يلي لتتحقق المساواة في كل سطر أفقي:

	كسر عادي	كسر عشري	نسبة مئوية
(i)	$\frac{٢}{٥}$	...	...
(ii)	...	٤٠%	...
(iii)	٠,٢٤	...	...

(٦) عبِّر عن نسبة ٣ سم^2 الى ١٢ سم^2 بصورة مئوية {٢٥٪}

وعبِّر عن نسبة ٤٥ سم الى ٢ متر بصورة مئوية {٢٢,٥٪}

ثم عبِّر عن نسبة ٨٠٠ غم الى ٢ كغ بصورة مئوية {٤٠٪}

(٧) ما قيمة ٣٠ ٪ من ٢٥٠ ؟ {٧٥}

وما قيمة ٥ ٪ من ١٨٢ ؟ {٩.١}

(٨) عدد طلاب مدرسة ١٤٦٠ طالباً منهم ٣٥٪ يمارسون رياضة السباحة، ما عدد الذين لا يمارسون السباحة؟

{ ٩٤٩ طالباً }

(٩) اذا كان ثمن سيارة ٩٠٠٠ دينار قبل عام، وارتفع ثمنها الآن بمقدار ٧,٥٪ كم أصبح ثمنها الجديد الآن؟

{ ٩٦٧٥ ديناراً }

(١٠) اذا كان السعر المكتوب على تلفزيون معروض للبيع في أحد معارض المحلات التجارية هو ١١٥٠ دينار، وكان الخصم المسموح به عليه ٢٠٪ من الثمن المكتوب، كم دينار يدفع المشتري ثمناً له؟

{٩٢٠ دينار}

(١١) اذا بيعت دراجة هوائية بمبلغ ٢٧٣ ديناراً، وبمكسب ٥٪ من ثمن الشراء، ما ثمن شراء هذه الدراجة؟

{٢٦٠ دينار}

(١٢) اذا علمت أن ثمن شراء كيس البطاطا "وزن ٥٠ كغ" هو ٤,٥ دينار، وثمن بيعه للمستهلكين هو ١٢ ديناراً. احسب النسبة المئوية للمكسب.

{ ٪١٦٦.٧ }

(١٣) اشترى شخص ثلاجة "١٢ قدم" بمبلغ ٨٠٠ دينار، وباعها بمبلغ ٥٥٠ ديناراً "لظروف خاصة"، احسب النسبة المئوية لخسارته.

{ ٪ ٣١.٢٥ }

(١٤) طبيب دخله الشهري من عمله ١٨٠٠٠ دينار، كم ديناراً يدفع ضريبة دخل اذا كانت نسبة الضريبة ١٢٪

{٢١٦٠ دينار}

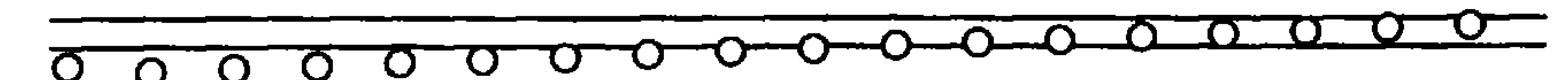
(١٥) اذا كان عدد سكان دولة عام ٢٠٠٠ م هو ٠٠٠ ٢٢٥ ٥٠ نسمة، وأصبح عدد السكان عام ٢٠٠٥م ٠٠٠ ٧٠٩ ٥٢ نسمة، عبِّر عن الزيادة التي حصلت للسكان بالنسبة المئوية.

(١٦) اذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ أوجد قيمة $\frac{٥س - ٣ص}{٧س + ٢ص}$ { $\frac{٣}{٢٩}$ }

{ ارشاد: اقسم البسط والمقام على ص }

(١٧) عدد طلاب مدرسة أساسية مختلطة ٢٥٠ فإذا كان عدد الطلاب فيها ١٥٠ فما النسبة المئوية لعدد الطالبات في المدرسة؟

{ ٪ ١٤٠ }



(١٨) تقدم ٥٠ طالباً لامتحان في الرياضيات، نجح منهم ٣٨ طالباً، ما النسبة المئوية للراسبين في نفس الامتحان؟

{ ٢٤٪ }

(١٩) اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

فأي من العبارات التالية ليس صواب:

(١) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

(٢) $\frac{\text{ص} + \text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{٥} + \text{٣}}{\text{٥}}$

(٣) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{٣} + \text{٥}}{\text{٥}}$

(٤) $\frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{٥} - \text{٣}}{\text{٣}}$

{العبارة الثانية بالتأكيد}

(٢٠) تشارك رسلان وسلمان وحمدان في احدى المشروعات التجارية ودفع كل منهم وعلى الترتيب ٤٠ ٠٠٠ ، ٥٠ ٠٠٠ ، ٦٠ ٠٠٠ دينار كرأسمال، وكانت أرباحهم في نهاية أحد الأعوام ٤٥٠٠٠ دينار. ما نصيب كل منهم من الأرباح؟

{ ١٢٠٠٠ ، ١٥٠٠٠ ، ١٨٠٠٠ }

{ ارشاد: توزع الأرباح بنسبة رؤوس أموالهم }

(٢١) انتقلت احدى السيدات الى رحمة الله بعد أن كان زوجها قد سبقها الى هناك منذ سنوات، ولم تترك إلا مبلغ ٩٦٠٠٠ دينار، بيِّن كيف يتقاسم ورثتها هذا المبلغ علماً بأنهم ولد وبنتان فقط.

{ ٤٨٠٠٠ ، ٢٤٠٠٠ ، ٢٤٠٠٠ }

(٢٢) ما النسبة بين اللتر و ٤٠٠ سم^{٣} { ٥ : ٢ }

(٢٣) اوجد ناتج جمع (٧٪ × ٨٥) + (٤٪ × ٩٠) + (٥٪ × ٢٠٩)

{ ٢٠ }

(٢٤) ما حجم قطعة من النحاس كتلتها ١٠٠ غم اذا علمت أن كتلة ٥ سم^{٣} من النحاس هو ٤٤,٥ غم؟

{ ١١,٢ سم^{٣} }

{ارشاد: تناسب طردي أو استخدم العلاقة بين الكتلة والحجم والكثافة }

(٢٥) ما النسبة بين الجذر التربيعي للعدد ١٩٦ والجذر التكعيبي للعدد ٩٢٦١ ؟

{ ٢ : ٣ }

(٢٦) كم يتقاضى مسعود من شركة الملابس اذا كان راتبه الشهري ١٥٠ دينار وعلاوته الشهرية الاضافية ٨٪ ؟

{١٦٢ }

(٢٧) اذا كان قانون العمل والعمال في احدى البلدان قد حدد عام ٢٠٠٠ م ساعات العمل في الأسبوع هناك بـ ٥٠ ساعة، ثم في عام ٢٠٠٥م أعاد تحديد ساعات العمل الاسبوعي بـ ٤٦ ساعة، عبِّر عن النقص في ساعات العمل على شكل نسبة مئوية.

{ ٨٪ }

(٢٨) اشترى عدنان سيارة قديمة بمبلغ ١٢٠٠ دينار، وكلفته صيانتها ٣٠٠ دينار وباعها بمكسب ٥٪ بكم دينار باعها؟

{ ١٥٧٥ }

(٢٩) بعد أن جهزت أم أروى وجبة العشاء لعائلتها ليلة رأس السنة الميلادية، وجدت أنها اشترت لحمة بمبلغ ٨ دنانير، وأن الوجبة كاملة كلفتها ١٢ دينار، احسب النسبة المئوية لثمن اللحمة بالنسبة للوجبة؟

{ ٦٦٫٧٪ }

(٣٠) اذا كان راتب حمدان الشهري ١٥٠ دينار، ويوفر منه وبصعوبة ٥٪ كم يوفر في السنة الواحدة؟

{ ٩٠ دينار }

(٣١) طبيب أسنان دخله الشهري ٢٠٠٠ دينار يتمتع باعفاءات قدرها ٢٠٪ من دخله السنوي. فكم دينار يدفع هذا الطبيب ضريبة دخل في السنة اذا كانت نسبتها ١٧٪؟

{ ٣٢٦٤ دينار }

(٣٢) توفي أحد الأغنياء وترك زوجة وابن وابنة ومبلغ ٦٠٠ ٠٠٠ دينار، ما نصيب كل من الورثة من التركة؟

{ ١٧٥ ٠٠٠ ، ٣٥٠ ٠٠٠ ، ٧٥ ٠٠٠ }

(٣٣) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث أ ، ب ، جـ ، د > صفر

بيّن أن $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{د}$

واذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

بيّن $ب^{٢} - جـ^{٢} = جـ(أ - جـ)$

(٣٤) ما العدد النسبي (الكسر العادي) الذي لا تتغير قيمته اذا أضفنا لبسطه العدد ١٨ ولمقامه العدد ٢٧؟

{ $\frac{٢}{٣}$ }

{ ارشاد: استعمل خاصية التناسب اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ + جـ}{ب + د}$ }

(٣٥) تحتاج حنفية ٣ ساعات لملء $\frac{١}{٤}$ بركة سباحة صغيرة الحجم، كم ساعة تحتاج الحنفية نفسها لملء $\frac{٧}{٨}$ البركة المذكورة؟

(٣٦) اذا كان طول سناء ١,٥ متر وطول وفاء ١,٨ متر، ما نسبة طول سناء الى طول وفاء؟

{ ٥ : ٦ }

(٣٧) اشترت سعاد ٦ أمتار قماش من الحرير بمبلغ ٧٥ دينار، فما ثمن ١٦ متراً من القماش نفسه؟

(٣٨) تقطع طائرة المسافة بين دولتين في زمن قدره ٩ ساعات، اذا كانت سرعتها ٢٠٠كم/ ساعة، كم ساعة تحتاج لقطع المسافة نفسها اذا أصبحت سرعتها ٣٠٠كم/ ساعة؟

(٣٩) أعط مثالاً عددياً واحداً يوضح الخاصية التالية للتناسب:

$$\text{اذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} \quad \text{فإن } \frac{أ + جـ}{ب + د} = \frac{أ - جـ}{ب - د}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية

(٤٠) رُسم مخططاً لقطعة من الأرض بمقياس رسم ١ : ٢٥٠٠٠ فإذا كان طول القطعة على المخطط = ٤ سم وعرضها = ٢ سم. احسب أبعادها الحقيقية بالأمتار.

(٤١) اذا كان $\frac{١}{٥} = \frac{٢}{١٠}$ فاملأ الفراغات داخل المربعات أدناه:

$$\frac{١}{٢} = \frac{\square}{\square} \quad ، \quad \frac{٥}{١٠} = \frac{\square}{\square}$$

$$١ \times \square = ٢ \times \square \quad ، \quad \frac{١ + ٥}{٥} = \frac{٢ + \square}{\square}$$

(٤٢) وزعت احدى الجمعيات التعاونية مبلغ ٢٠٠٠ دينار كمعونة على ثلاث عائلات بنسبة ٢ : ٣ : ٥ فما نصيب كل عائلة من هذه المعونة؟

{ ٤٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٠٠٠ }

(٤٣) قسِّم المبلغ ٨٤٠٠ دينار الى مبلغين النسبة بينهما كنسبة $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٥}$

(٤٤) عبِّر عن ٠,٠٧٥ بالنسبة المئوية.

{ ٪ ٧,٥ }

(٤٥) ذهبت سعاد في موسم التنزيلات الصيفية لشراء فستان زاهي الألوان، فإذا كان السعر المكتوب عليه ١٧ ديناراً والتنزيلات ٢٥٪ ، كم ديناراً تدفع سعاد ثمناً للفستان الجميل ذاك؟

{ ١٢.٧٥ }

(٤٦) اذا علمت أن عدد الشركات في احدى الدول العربية ٦٥٠ شركة، مسجل منها ٤٠٠ شركة في غرفة التجارة والصناعة في ذاك البلد، احسب النسبة المئوية للشركات غير المسجلة في الغرفة.

{ ٣٨.٥ ٪ تقريباً }

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبدائ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

المجموعات والأعداد - النسبة والتناسب





للنشر والتوزيع
الأردن - عمان
هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252
فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781
البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo
الموقع الإلكتروني: www.darosama.net